

ANFÄNGERPRAKTIKUM DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK,
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Versuch 02
Kreiselpräzession

Praktikant/in:	Vladislav Begert
E-Mail-Adresse:	v.begert@stud.uni-goettingen.de
Praktikant/in:	Christoph Kehl
E-Mail-Adresse:	christoph.kehl01@stud.uni-goettingen.de
Betreuer/in:	Mathis Klever
Datum der Durchführung:	12.01.2026

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	4
2.1	Bestimmung des Trägheitsmoments	4
2.2	Präzession	4
2.3	Nutation	5
3	Durchführung	6
3.1	Versuchsaufbau	6
3.2	Versuchsteil A: Das physikalische Pendel	7
3.3	Versuchsteil B: Präzessionsbewegung	7
3.4	Versuchsteil C: Nutationsschwingung	7
4	Auswertung	8
4.1	Horizontale und vertikale Trägheitsmomente des Kreisels	8
4.2	Bestimmung des Trägheitsmoments mit einem physikalischen Pendel . . .	9
4.3	Berechnung des Trägheitsmoments aus der Präzessionsgeschwindigkeit . .	12
4.4	Vergleich beider Methoden zur Bestimmung des Trägheitsmoments	14
4.5	Nutationsmessung	14
5	Diskussion	17

1 Einleitung

Gegenstand des vorliegenden Versuchs ist die Untersuchung der Dynamik eines starren rotierenden Körpers unter dem Einfluss eines äußeren Drehmoments. Ein rotierender Kreisel reagiert auf eine senkrecht zur Drehachse wirkende Kraft nicht mit einer einfachen Kippbewegung, sondern mit der sogenannten Präzession – einer Ausweichbewegung der Rotationsachse.

Im Rahmen dieses Experiments soll die Abhängigkeit der Präzessionsfrequenz von zwei zentralen Parametern quantitativ bestimmt werden: zum einen von der Winkelgeschwindigkeit des Kreisels selbst und zum anderen vom einwirkenden Drehmoment. Letzteres wird im Versuch durch die Verwendung unterschiedlicher Massestücke an einem definierten Hebelarm variiert. Ziel ist es, die Proportionalität zwischen dem Drehmoment und der Präzessionsgeschwindigkeit zu verifizieren und daraus das Trägheitsmoment des Kreisels experimentell abzuleiten.

2 Theorie

Die Dynamik eines Kreisels wird durch den Zusammenhang zwischen dem Drehimpuls $\vec{L}$ und dem extern wirkenden Drehmoment $\vec{M}$ beschrieben. Gemäß dem Drehimpulssatz führt ein Drehmoment zu einer zeitlichen Änderung des Drehimpulses:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (2.0.1)$$

2.1 Bestimmung des Trägheitsmoments

Zur Charakterisierung des Kreisels muss dessen Trägheitsmoment Θ bekannt sein. Wird das Rad durch ein exzentrisch angebrachtes Pendelgewicht der Masse m_P als **physikalisches Pendel** betrieben, lässt sich Θ aus der Schwingungsdauer T_{Pendel} berechnen:

$$\Theta = \frac{m_P \cdot g \cdot s \cdot T_{\text{Pendel}}^2}{4\pi^2} \quad (2.1.1)$$

Hierbei repräsentiert g die Erdbeschleunigung und s den Abstand des Gewichts vom Drehpunkt.

2.2 Präzession

Wirkt ein Drehmoment $\vec{M}$ senkrecht zur Drehachse eines mit der Winkelgeschwindigkeit ω_R rotierenden Kreisels, so weicht die Achse senkrecht zur Kraftrichtung aus. Diese Bewegung wird als **Präzession** bezeichnet. Das Drehmoment wird im Versuch durch ein Zusatzgewicht m_Z im Abstand r erzeugt:

$$M = m_Z \cdot g \cdot r \quad (2.2.1)$$

Die resultierende Präzessionsfrequenz ω_P ergibt sich aus dem Verhältnis von Drehmoment zu Drehimpuls:

$$\omega_P = \frac{M}{L} = \frac{m_Z \cdot g \cdot r}{\Theta \cdot \omega_R} \quad (2.2.2)$$

Unter Verwendung der messbaren Periodendauern T_P (Präzession) und T_R (Rotation) folgt der für die Auswertung zentrale Zusammenhang:

$$T_P = \frac{4\pi^2 \cdot \Theta}{m_Z \cdot g \cdot r} \cdot \frac{1}{T_R} \quad (2.2.3)$$

2.3 Nutation

Die **Nutation** beschreibt eine der Präzession überlagerte, meist schnellere Schwingung der Figurenachse, die durch äußere Stöße angeregt wird. Die Nutationsfrequenz ω_N ist näherungsweise gegeben durch:

$$\omega_N = \frac{L}{\Theta_{\perp}} = \frac{\Theta \cdot \omega_R}{\Theta_{\perp}} \quad (2.3.1)$$

Dabei bezeichnet $\Theta_{\perp}$ das Trägheitsmoment des Systems bezüglich der Achsen senkrecht zur Rotationssymmetrieachse.

3 Durchführung

Die Durchführung des Experiments gestaltet sich aufgrund mechanischer Instabilitäten als fehleranfällig. Grundsätzlich ist darauf zu achten, den Trägerstab beim Anwerfen des Kreisels mittels Antriebsschnur fest zu fixieren. Um unerwünschte Nutationen zu minimieren, muss das Zusatzgewicht beim Start der Präzessionsbewegung zudem äußerst vorsichtig freigegeben werden.

3.1 Versuchsaufbau

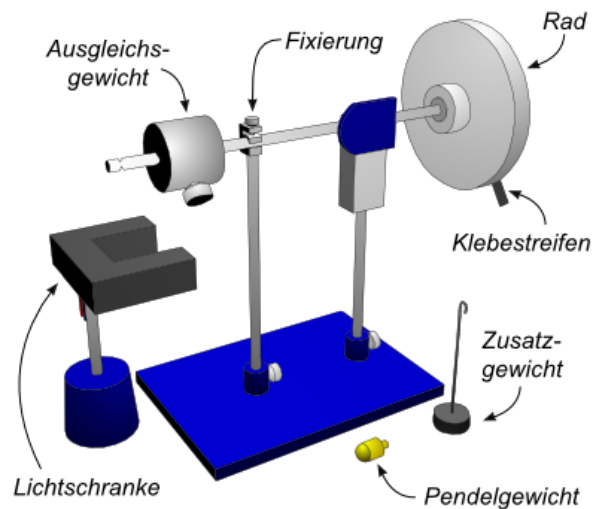


Abbildung 1: Aufbau des Experiments

Der verwendete Kreisel besteht aus einem Rad auf einer Achse, die an einem zentralen Drehpunkt gelagert ist. Um eine exakte horizontale Ausrichtung zu erreichen, verfügt die Apparatur über ein verschiebbares Ausgleichsgewicht. Da der Schwerpunkt der Konstruktion nicht automatisch im Unterstützungspunkt liegt, muss dieser durch Justierung des Gewichts manuell in die Waagerechte gebracht werden.

Zusätzlich kann das System zu Beginn für vorbereitende Messungen (wie die Bestimmung der Pendeldauer) fest eingespannt werden. Zur Induktion der Präzession werden am achsseitigen Ende Zusatzmassen angebracht, die ein äußeres Drehmoment erzeugen. Um eine saubere Kreisbahn ohne starke Nutation zu gewährleisten, wird der Kreisel beim Start vorsichtig manuell in die Präzessionsbewegung geführt.

3.2 Versuchsteil A: Das physikalische Pendel

Zunächst wird die Achse des Kreisels fest eingespannt. Durch das Einsetzen eines Zusatzgewichts wird das System in ein physikalisches Pendel transformiert. Die Masse des Gewichts wird vorab bestimmt. Zur Ermittlung der Schwingungsdauer wird die Zeit für jeweils 10 volle Perioden gestoppt. Um die Genauigkeit zu erhöhen, wird dieser Vorgang mindestens dreimal wiederholt. Die gesamte Messreihe wird anschließend an der diametral gegenüberliegenden Position erneut durchgeführt.

3.3 Versuchsteil B: Präzessionsbewegung

Nach Entfernen der Einspannung wird der Kriesei über das Ausgleichsgewicht horizontal austariert. Masse und Abstand des Ausgleichsgewichts werden notiert. Für die Drehzahlmessung dient ein Papierstreifen am Radrand als Unterbrecher für die Lichtschranke.

Die Messung erfolgt zügig in folgenden Schritten:

- Das Rad wird beschleunigt und die Rotationsperiode T_R gemessen.
- Ein Zusatzgewicht (10 – 60 g) wird angehängt.
- Der Kriesei wird vorsichtig manuell in die Präzession geführt und die Zeit für einen halben Umlauf ($\frac{1}{2}T_P$) gestoppt.
- Nach Abnahme des Gewichts wird T_R erneut kontrolliert.

Dieser Ablauf wird für drei verschiedene Gewichte wiederholt.

3.4 Versuchsteil C: Nutationsschwingung

Das Rad wird erneut beschleunigt und T_R gemessen. Durch einen gezielten Stoß gegen die freie Achse wird eine Nutationsbewegung provoziert, deren Periode T_N gestoppt wird. Zwischen den Messungen wird jeweils die aktuelle Rotationsperiode kontrolliert. Dieser Ablauf wird dreimal durchgeführt.

4 Auswertung

4.1 Horizontale und vertikale Trägheitsmomente des Kreisels

Um das *horizontale Trägheitsmoment* Θ_x des Rades der Masse M mit Radius R zu bestimmen, verwendet man folgende Formel:

$$\Theta_x = \frac{1}{2}MR^2. \quad (4.1.1)$$

Für den Kreisel mit der Masse $M = 1.324 \text{ kg}$ und dem Radius $R = 0.1225 \text{ m}$ ergibt sich folgendes *horizontales Trägheitsmoment* Θ_x :

$$\Theta_x \approx 9.93 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2. \quad (4.1.2)$$

Des Weiteren wird noch das *vertikale Trägheitsmoment* bestimmt. Nach der Definition des Trägheitsmoments gilt:

$$\Theta = \sum_i M_i R_i^2. \quad (4.1.3)$$

Tabelle 1: Geometrische und physikalische Parameter der Einzelkomponenten

Größe	Symbol	Wert
<i>Ausgleichsgewicht</i>		
Masse	M_{AG}	0.932 kg
Abstand zur Drehachse	a_{AG}	0.145 m
Länge	l_{AG}	0.043 m
Durchmesser	d_{AG}	0.060 m
<i>Scheibe</i>		
Masse	M_{S}	1.324 kg
Durchmesser	d_{S}	0.245 m
Dicke	D_{S}	0.028 m
<i>Stab</i>		
Masse	M_{St}	0.500 kg
Länge	l_{St}	0.400 m
<i>Zusatzgeometrie des Aufbaus</i>		
Abstand Mittelpunkt zum Zusatzgewicht	a_{ZG}	0.275 m
Abstand Mittelpunkt zur Scheibe	a_{S}	0.115 m

Dabei ist zu beachten, dass die Masse des Stabes $M_{\text{St}} = 0.500 \text{ kg}$ nicht exakt bekannt ist, sondern abgeschätzt werden musste.

Das Ausgleichsgewicht wird näherungsweise als Zylinder betrachtet, dessen Trägheitsmoment um eine Achse senkrecht zur Zylinderachse gegeben ist. Der Stab wird als dünner homogener Stab angenommen, dessen Eigenträgheitsmoment gegenüber dem Steiner-Anteil vernachlässigbar klein ist.

Damit ergibt sich für das vertikale Trägheitsmoment

$$\Theta_z = \Theta_{AG} + \Theta_S + \Theta_{St}. \quad (4.1.4)$$

$$\Theta_z = M_{AG} \left(\frac{R_{AG}^2}{4} + \frac{l_{AG}^2}{12} + a_{AG}^2 \right) + M_S \left(\frac{R_S^2}{4} + \frac{D_S^2}{12} + a_S^2 \right) + \frac{M_{St}}{3l_{St}} (a_{zG}^3 + a_S^3). \quad (4.1.5)$$

Numerisch ergibt sich:

$$\Theta_z \approx 5.2 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2. \quad (4.1.6)$$

4.2 Bestimmung des Trägheitsmoments mit einem physikalischen Pendel

Das Trägheitsmoment des Systems kann alternativ mithilfe der Schwingungsdauer eines physikalischen Pendels bestimmt werden. Für ein Pendel mit der Periodendauer T , einem Zusatzgewicht der Masse M_{zG} im Abstand a_{zG} von der Drehachse gilt:

$$\Theta = \frac{T^2 g M_{zG} a_{zG}}{4\pi^2} - M_{zG} a_{zG}^2. \quad (4.2.1)$$

Es wurden pro Messreihe jeweils drei Zeitmessungen durchgeführt. Dabei wurden 20 Auslenkungen gezählt, was 10 vollständigen Schwingungen entspricht. Die Periodendauer ergibt sich somit zu:

$$T = \frac{t}{10}. \quad (4.2.2)$$

Tabelle 2: Trägheitsmoment Θ mit individueller Messunsicherheit

Messreihe	T [s]	ΔT [s]	Θ [kg m ²]	σ_Θ [kg m ²]
<i>1. Messreihe (Zusatzgewicht bei 0°)</i>				
1	1.74	0.01	8.98×10^{-3}	2.99×10^{-4}
2	1.75	0.01	9.07×10^{-3}	3.01×10^{-4}
3	1.74	0.01	8.98×10^{-3}	2.99×10^{-4}
<i>2. Messreihe (Zusatzgewicht bei 180°)</i>				
1	1.71	0.01	8.80×10^{-3}	2.94×10^{-4}
2	1.73	0.01	8.89×10^{-3}	2.97×10^{-4}
3	1.72	0.01	8.84×10^{-3}	2.96×10^{-4}

Der Fehler der Periodendauer setzt sich aus der Auflösung der Stoppuhr sowie einem relativen Ablesefehler zusammen und wird zu

$$\Delta T = 0.01 + 0.005 \cdot T. \quad (4.2.3)$$

Mit der unten angeführten Formel wurde der Fehler des Trägheitsmoments Θ mithilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$\sigma_\Theta = \sqrt{\sigma_T^2 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial T} \right)^2 + \sigma_{a_{ZG}}^2 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial a_{ZG}} \right)^2}. \quad (4.2.4)$$

$$\sigma_\Theta = \sqrt{\sigma_T^2 \left(\frac{T g M_{ZG} a_{ZG}}{2\pi^2} \right)^2 + \sigma_{a_{ZG}}^2 \left(\frac{T^2 g M_{ZG}}{4\pi^2} - 2 M_{ZG} a_{ZG} \right)^2}. \quad (4.2.5)$$

Da die Gravitationsbeschleunigung g als exakt bekannt angenommen wird und die Masse des Zusatzgewichts mit ausreichender Genauigkeit bestimmt ist, gehen deren Unsicherheiten nicht in die Fehlerfortpflanzung ein.

Der Mittelwert des Trägheitsmoments wurde aus den sechs Einzelmessungen bestimmt:

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Theta_i \quad (n = 6). \quad (4.2.6)$$

$$\bar{\Theta} = 8.93 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2. \quad (4.2.7)$$

Der Fehler des Mittelwerts wurde unter Verwendung der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$\sigma_{\bar{\Theta}} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{\Theta,i}^2} \quad (n = 6). \quad (4.2.8)$$

$$\sigma_{\bar{\Theta}} = 1.21 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2. \quad (4.2.9)$$

Somit ist das Endergebnis für das Trägheitsmoment des Systems:

$$\bar{\Theta} = (8.93 \pm 0.12) \times 10^{-3} \text{ kg m}^2. \quad (4.2.10)$$

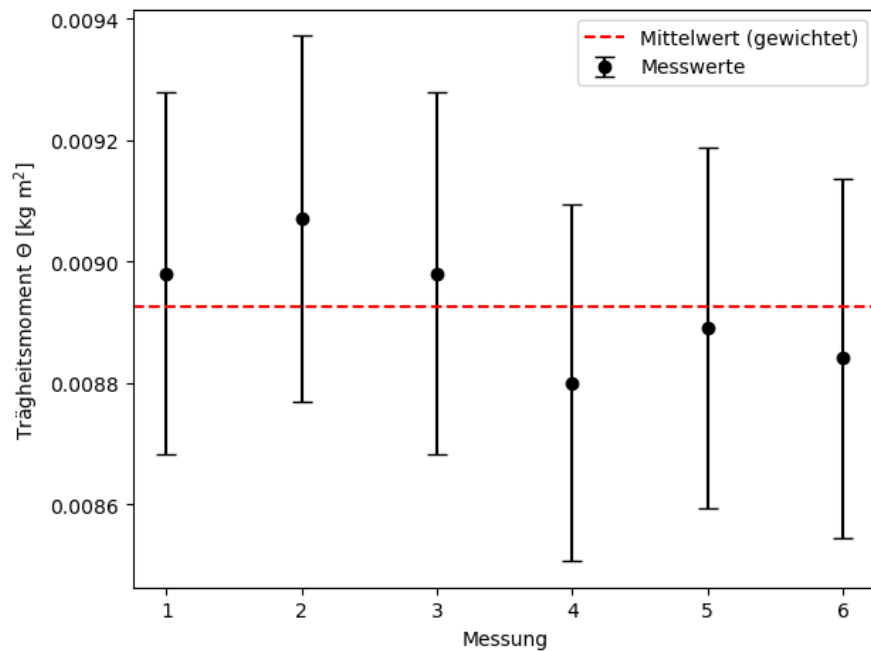


Abbildung 2: Einzelmessungen des Trägheitsmoments Θ .

4.3 Berechnung des Trägheitsmoments aus der Präzessionsgeschwindigkeit

Die Formel für das Trägheitsmoment aus der Präzessionsgeschwindigkeit lässt sich wie folgt herleiten:

$$\omega_p = \frac{M_{ZG} a_{ZG} g}{\Theta \omega_k}. \quad (4.3.1)$$

$$\Theta = \frac{M_{ZG} a_{ZG} g}{\omega_p \omega_k}. \quad (4.3.2)$$

Die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels ergibt sich aus der Zeit t_k für eine halbe Umdrehung zu:

$$\omega_k = \frac{\pi}{t_k}. \quad (4.3.3)$$

Zur graphischen Auswertung wird die Größe

$$Y = \omega_p \omega_k. \quad (4.3.4)$$

definiert. Dies ermöglicht die graphische Darstellung der Parameter ω_k und $\frac{1}{\omega_p}$ sowie einer dazugehörigen linearen Regression. Das Trägheitsmoment lässt sich somit direkt aus der Steigung bestimmen.

So ergibt sich die Formel für das Trägheitsmoment:

$$\Theta = \frac{M_{ZG} a_{ZG} g}{Y}. \quad (4.3.5)$$

Der Fehler wird mithilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$\sigma_\Theta = \sqrt{\sigma_Y^2 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right)^2 + \sigma_{a_{ZG}}^2 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial a_{ZG}} \right)^2}. \quad (4.3.6)$$

Tabelle 3: Trägheitsmoment Θ aus Präzessionsmessungen mit zugehörigen Unsicherheiten

Zusatzgewicht [kg]	Θ [kg m ²]	σ_Θ [kg m ²]	Y [rad ² s ⁻²]	σ_Y [rad ² s ⁻²]
0.010	8.98×10^{-3}	2.99×10^{-4}	5.71×10^{-2}	1.50×10^{-3}
0.050	8.84×10^{-3}	2.96×10^{-4}	1.20×10^{-1}	1.20×10^{-2}
0.100	8.95×10^{-3}	2.95×10^{-4}	3.02×10^{-1}	2.20×10^{-2}

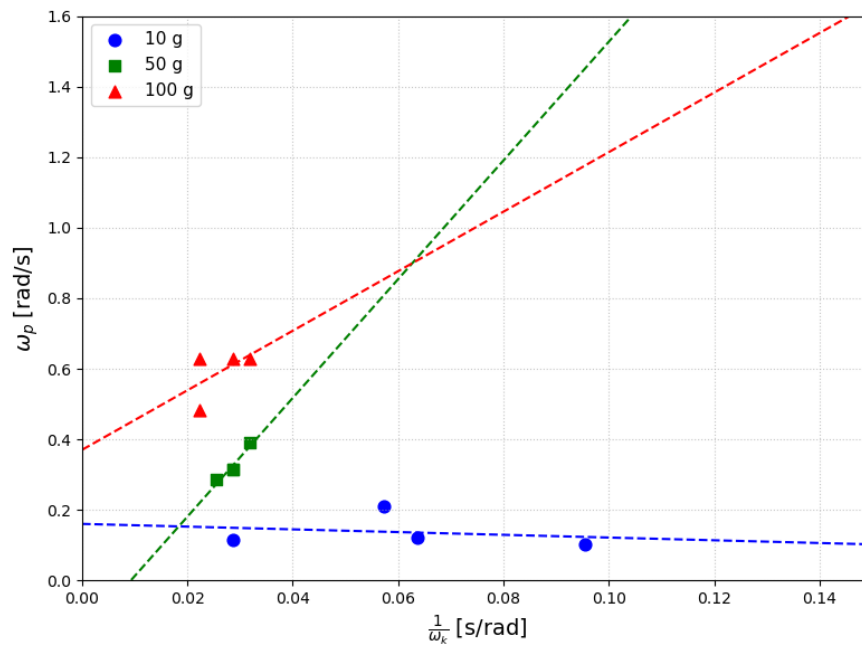


Abbildung 3: Darstellung der Präzessionswinkelgeschwindigkeit ω_p als Funktion von $\frac{1}{\omega_k}$ für unterschiedliche Zusatzmassen.

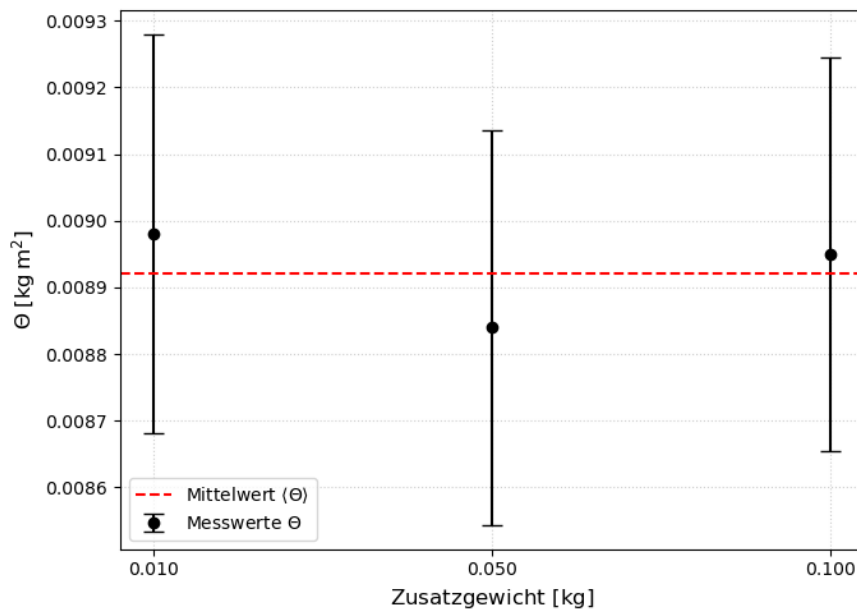


Abbildung 4: Trägheitsmoment Θ aus Präzessionsmessungen für verschiedene Zusatzgewichte mit zugehörigen Unsicherheiten.

Es ergibt sich folgender Gesamtmittelwert für das Trägheitsmoment:

$$\bar{\Theta} = 8.92 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2. \quad (4.3.7)$$

4.4 Vergleich beider Methoden zur Bestimmung des Trägheitsmoments

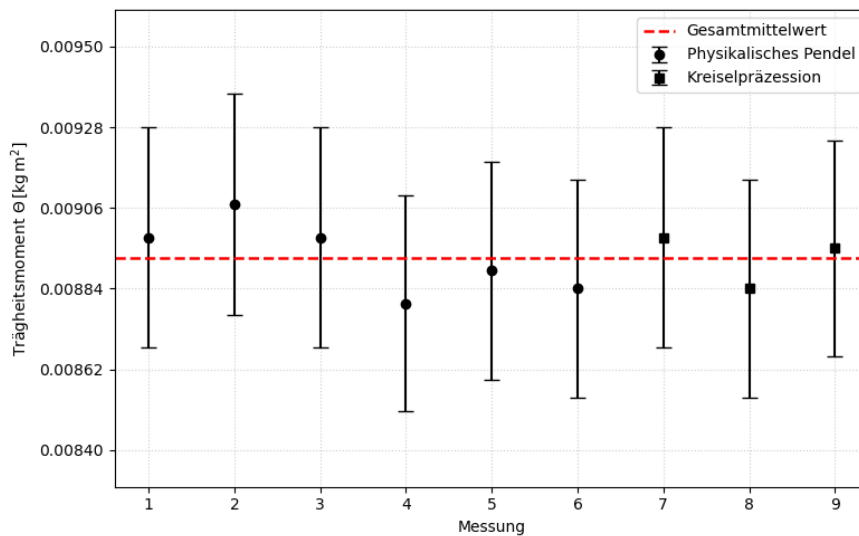


Abbildung 5: Trägheitsmoment Θ aus Präzessionsmessungen für verschiedene Zusatzgewichte und den Messungen zum physikalischen Pendel.

4.5 Nutationsmessung

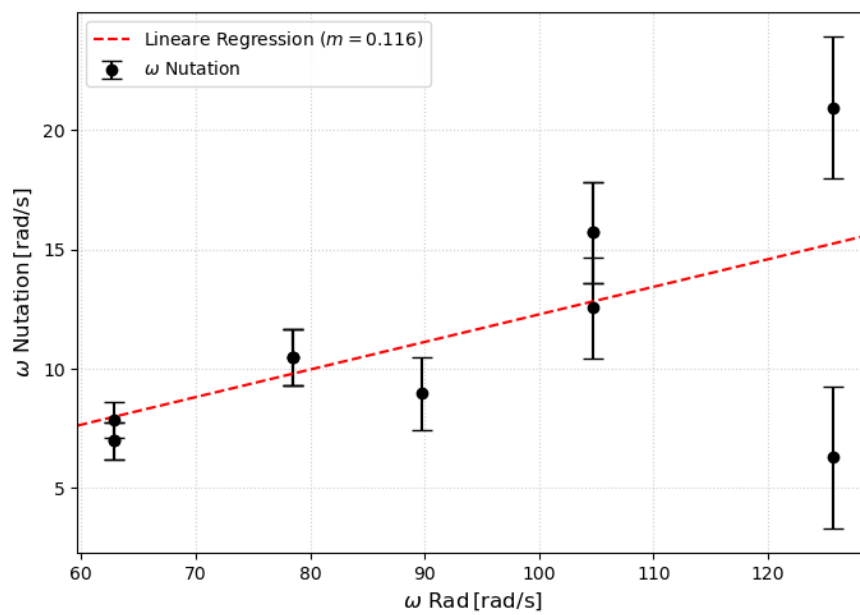
Die Nutationswinkelgeschwindigkeit ω_N ergibt sich aus der gemessenen Nutationsperiode T_N :

$$\omega_N = \frac{2\pi}{T_N}. \quad (4.5.1)$$

Hierbei ist T die Nutationsperiode. Der Fehler wurde wie in Glg.(4.2.3) und mithilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet.

Tabelle 4: Winkelgeschwindigkeiten von Rad und Nutation mit gaußscher Unsicherheit der Nutationsfrequenz

ω_R [rad/s]	ω_N [rad/s]	σ_{ω_N} [rad/s]
125.66	6.28	2.98
89.76	8.98	1.53
62.83	6.98	0.76
104.72	12.57	2.12
78.54	10.47	1.18
62.83	6.98	0.76
125.66	20.94	2.98
104.72	15.71	2.12
78.54	10.47	1.18
104.72	15.71	2.12
78.54	10.47	1.18
62.83	7.85	0.76

Abbildung 6: ω_N als Funktion von ω_R mit linearer Regression.

Der experimentell bestimmte Quotient

$$\frac{\omega_N}{\omega_R} = 0.116 \quad (4.5.2)$$

liegt in der gleichen Größenordnung wie der theoretisch erwartete Wert

$$\frac{\Theta_x}{\Theta_z} = 0.190 \quad (4.5.3)$$

aus dem Abschnitt [4.1](#) mit einer relativen Abweichung von 38.9%.

5 Diskussion

Die in Abschnitt 4.1 vorgenommenen Abschätzungen ergeben Werte in der richtigen Größenordnung, sind jedoch mit relativ großen Unsicherheiten behaftet. Ein wesentlicher Beitrag zu diesem Fehler ergibt sich daraus, dass die Masse der Stange nicht experimentell bestimmt werden konnte. Da dieser Wert nicht angegeben war, musste er geschätzt werden, was eine signifikante systematische Unsicherheit in die Berechnung des vertikalen Trägheitsmoments Θ_z einführt. Da dieses Trägheitsmoment direkt in den theoretischen Zusammenhang zur Beschreibung der Nutationsbewegung eingeht, wirkt sich diese Unsicherheit auch auf den Vergleich zwischen experimentell bestimmten und theoretisch erwarteten Größen aus.

Während des Versuchs mit angehängten Zusatzgewichten traten experimentelle Schwierigkeiten auf. Durch das Anbringen des Zusatzgewichts wurde dieses häufig in Schwingung versetzt, wodurch die idealisierte Annahme eines ruhenden Massenpunktes verletzt wurde. Diese Schwingungen führten zu zusätzlichen Störeinflüssen und veränderten effektiv das auf den Kreisel wirkende Drehmoment, was sich negativ auf die Bestimmung der Präzessionsgeschwindigkeit auswirkte.

In Abbildung 3 ist zu erkennen, dass die experimentell bestimmten Regressionsgeraden nicht, wie es die Theorie für den idealisierten Fall erwarten lässt, durch den Ursprung verlaufen. Theoretisch sollte mit zunehmender Masse des Zusatzgewichts eine größere Steigung der Regressionsgeraden auftreten. Dieses Verhalten konnte im Experiment jedoch nur eingeschränkt beobachtet werden, was auf systematische Fehlerquellen wie Reibungseffekte an der Aufhängung sowie auf Unsicherheiten bei der Bestimmung der Winkelgeschwindigkeiten hindeutet.

Bei der Untersuchung der Nutation ergaben sich weitere Probleme. Insbesondere erwies sich das Messen mehrerer vollständiger Perioden als schwierig, da die Nutationsbewegung stark gedämpft war und häufig bereits nach kurzer Zeit abklang. Dies führte zu vergleichsweise großen Unsicherheiten bei der Bestimmung der Nutationsfrequenz, was sich in der deutlichen Streuung der Messwerte in Abbildung 6 widerspiegelt.

Der experimentell bestimmte Quotient $\frac{\omega_N}{\omega_R}$ weicht mit etwa 38,9 % deutlich vom Verhältnis $\frac{\Theta_x}{\Theta_z}$ ab. Diese Abweichung lässt sich insbesondere durch die starke Dämpfung der Nutationsbewegung sowie durch die Unsicherheit in der Abschätzung des vertikalen Trägheitsmoments Θ_z erklären.

Es lässt sich festhalten, dass der Versuch anfällig für Fehlerquellen ist. Dazu zählen Reibungseffekte, Ungenauigkeiten bei der Zeitmessung, das Schwingen des Zusatzgewichts sowie eine damit verbundene Dämpfung der Bewegung. Diese Effekte tragen zur Vergrößerung der Messunsicherheiten bei. Zwar ergibt die Auftragung der Messdaten insgesamt einen linearen Zusammenhang, dieser ist jedoch deutlich durch experimentelle Fehler überlagert und erlaubt eine qualitative Bestätigung der theoretischen Erwartungen.