

ANFÄNGERPRAKTIKUM DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK,
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Versuch 08
Messung großer Widerstände

Praktikant/in:	Vladislav Begert
E-Mail-Adresse:	v.begert@stud.uni-goettingen.de
Praktikant/in:	Christoph Kehl
E-Mail-Adresse:	christoph.kehl01@stud.uni-goettingen.de
Betreuer/in:	Carla Neubert
Datum der Durchführung:	15.06.2026

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theorie	2
	Widerstandsmessung an der Grenze	2
	Auf- und Entladung eines Kondensators	2
	Analoger Stromintegrator	2
	Schwingkreise	3
	Eingangswiderstände	3
3	Durchführung	5
3.1	Versuchsaufbau	5
	a) Aufbau zur zeitaufgelösten Ladungsmessung	5
	b) Aufbau zur Analyse transienter Schwingungsvorgänge	6
3.2	Durchführung	7
	1. Systemkalibrierung des Stromintegrators	7
	2. Ladungszerfall am Vielplattenkondensator	7
	3. Transiente Signalverläufe im Schwingkreis	7
	4. Direktmessung der Systemkomponenten	8
	5. Kapazitätsprüfung	8
4	Auswertung	9
4.1	Kalibrierung des Stromintegrators	9
4.2	Bestimmung der elektrischen Feldkonstanten	11
4.3	Bestimmung des unbekannten Widerstands aus der Entladungsmessung	13
4.4	Spannungsverläufe der RC- und RLC-Schaltungen	15
4.5	Bestimmung der Kapazität und des Eingangswiderstands	16
4.6	Bestimmung des unbekannten Widerstands aus der Schwingkreismessung	18
4.7	Bestimmung der Induktivität und des Verlustwiderstands der Luftspule	20
4.8	Vergleich der Werte für den unbekannten Widerstand	21
4.9	Vergleich mit den Multimeter-Messungen	22
4.10	Vergleich der Induktivität mit dem berechneten Wert	22
5	Diskussion	23
	Literatur	25

1 Einleitung

Die präzise Bestimmung elektrischer Widerstände gehört zu den fundamentalen Messaufgaben der experimentellen Physik und Elektrotechnik. Während moderate Widerstandswerte im Alltag problemlos über das Ohmsche Gesetz oder mittels klassischer Brückenschaltungen ermittelt werden können, erfordert die Charakterisierung extrem hochohmiger Systeme gänzlich andere Herangehensweisen.

Der praktische und industrielle Bezug solcher Messungen ist immens: In der modernen Energietechnik hängen die Betriebssicherheit und Effizienz von Hochspannungsleitungen und Leistungstransformatoren maßgeblich von der Qualität ihrer Isolationsmaterialien ab. Winzige Leckströme im Nano- oder Pikoampere-Bereich können langfristig zu thermischen Durchschlägen und Systemausfällen führen. Auch in der Halbleiterindustrie, bei der Fertigung von Dielektrika für integrierte Schaltkreise sowie in der Sensortechnik (beispielsweise bei hochempfindlichen Fotodetektoren oder piezoelektrischen Sensoren), ist die genaue Kenntnis parasitärer Riesenwiderstände essenziell.

Da Standard-Multimeter aufgrund ihres eigenen, endlichen Innenwiderstandes bei solchen Messungen versagen und den Stromkreis kurzschließen würden, nutzt dieser Versuch dynamische Ansätze: Die präzise Beobachtung von Ladungs- und Entladevorgängen an Kondensatoren sowie das Resonanzverhalten in RC- und RLC-Schwingkreisen.

2 Theorie

Widerstandsmessung an der Grenze

Die Bestimmung eines Widerstandes stößt bei Werten im Mega- und Gigaohm-Bereich auf gravierende experimentelle Grenzen. Schaltet man ein herkömmliches Spannungsmessgerät parallel zu einem hochohmigen Prüfling R_x , so fließt ein signifikanter Teil des Stroms durch den Innenwiderstand des Messgeräts selbst [3, S. 241]. Das Gerät misst folglich nicht den isolierten Widerstand R_x , sondern die Parallelschaltung aus R_x und R_{Mess} , was zu massiven systematischen Messfehlern führt. Groß nennen wir einen Widerstand quantitativ genau dann, wenn er in die Größenordnung des Geräteinnenwiderstandes rückt.

Auf- und Entladung eines Kondensators

Ein Kondensator speichert bei einer anliegenden Spannung U die elektrische Ladung $Q = C \cdot U$. Für einen idealen Plattenkondensator mit N Platten, der effektiven Fläche A und dem Plattenabstand d berechnet sich die Kapazität im Vakuum bzw. in Luft ($\epsilon_r \approx 1$) über das Gaußsche Gesetz der Elektrostatik gemäß [1, S. 12]:

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (2.0.1)$$

Wird ein mit der Ladung Q_0 geladener Kondensator zum Zeitpunkt $t = 0$ über einen Entladewiderstand R kurzgeschlossen, folgt der zeitliche Verlauf der Ladung $Q(t)$ aufgrund der Maschenregel einer exponentiellen Abnahme [3, S. 255]:

$$Q(t) = Q_0 \cdot \exp\left(-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t\right) \quad (2.0.2)$$

Für den komplementären Aufladevorgang an einer konstanten Gleichspannungsquelle ergibt sich die zeitabhängige Ladung analog zu:

$$Q(t) = Q_{\text{max}} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t\right)\right) \quad (2.0.3)$$

Analoger Stromintegrator

Um kleinste Ladungsmengen $Q(t)$ ohne nennenswerten Spannungsabfall zu messen, wird ein analoger Stromintegrator eingesetzt. Dieser basiert auf einer invertierenden Operationsverstärkerschaltung mit kapazitiver Rückkopplung (Miller-Integrator) [4, S. 542].

Aufgrund der Eigenschaften des idealen Operationsverstärkers (virtuelle Masse am invertierenden Eingang) entspricht der Eingangsstrom $I_R(t)$ exakt dem Strom durch den Rückkoppelkondensator $I_C(t)$. Die resultierende Ausgangsspannung U_A verhält sich proportional zum Zeitintegral des Stroms:

$$U_A = \frac{Q_C}{C} = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I_R dt \quad (2.0.4)$$

Wird ein kalibrierter Spannungspuls $U_E(t)$ angelegt, ergibt sich mit $I_R = U_E(t)/R_e$ die mathematische Übertragungsfunktion [4, S. 543]:

$$U_A = -\frac{1}{R_e C} \int_{t_0}^t U_E(t) dt \quad (2.0.5)$$

Schwingkreise

Die Kombination von Kapazitäten und Induktivitäten führt auf elektrische Schwingkreise. Im Experiment wird ein Parallelschwingkreis untersucht (siehe Bild 3). Durch den unvermeidbaren ohmschen Widerstand R_L des Spulendrahtes erfährt das System eine kontinuierliche Dämpfung, die mathematisch durch eine homogene Differentialgleichung 2. Ordnung beschrieben wird [3, S. 267]:

$$\ddot{Q} + 2\beta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0 \quad (2.0.6)$$

Die Systemparameter Dämpfungskonstante β , ungedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_0 , Periodendauer T und gedämpfte Frequenz ω lauten:

$$\beta = \frac{R_L}{2L}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (2.0.7)$$

Das logarithmische Dekrement Λ als Maß für das Abklingverhalten ist definiert über [1, S. 350]:

$$\Lambda = \beta T = \frac{R_L}{2L} T \quad (2.0.8)$$

Eingangswiderstände

Bei der Messung transienter Signale mit dem Oszilloskop bildet dessen Eingangswiderstand R_{Osz} zusammen mit einem externen Serienwiderstand R_2 einen Spannungsteiler, wobei R_{Osz} parallel zum System liegt und den Gesamtwiderstand R_g reduziert [4, S. 21]:

$$\frac{1}{R_g} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{\text{Osz}}} \quad (2.0.9)$$

Unter Verwendung der charakteristischen Zeitkonstanten des Systems ($\alpha = R_{\text{Osz}}C$ und $\beta = R_gC$) lässt sich das mathematische Verhältnis aufstellen:

$$\beta = R_gC = \frac{R_{\text{Osz}}R_2}{R_{\text{Osz}} + R_2}C = \alpha \frac{R_2}{R_{\text{Osz}} + R_2} \quad (2.0.10)$$

Durch algebraische Isolation des Zielparameters erhält man die fundamentale Auswertgleichung für den exakten Oszilloskop-Innenwiderstand:

$$R_{\text{Osz}} = \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) R_2 \quad (2.0.11)$$

3 Durchführung

3.1 Versuchsaufbau

Die gesamte Apparatur teilt sich in zwei funktionelle Kernaufbauten auf. Die optische Verteilung aller Komponenten im Laborraum wird in Abbildung 1 visualisiert. Der erste Aufbau dient der Widerstands- und Ladungsmessung. Er besteht aus einem Netzgerät zur Gleichspannungsversorgung, einer Wippe, einem analogen Stromintegrator und einem Eichgenerator. Ein Plattenkondensator mit 65 Platten, ein Schutzwiderstand von $100\text{ k}\Omega$, ein Schalter sowie der unbekannte Widerstand R_x vervollständigen diesen Schaltkreis. Als zentrales Messmedium wird ein Digital-Oszilloskop eingesetzt. Für den zweiten Aufbau zur Vermessung von elektrischen Schwingkreisen werden zusätzliche Komponenten integriert. Hierzu zählen ein Impulsgeber beziehungsweise Impulsgenerator, eine Luftspule sowie weitere Widerstände.

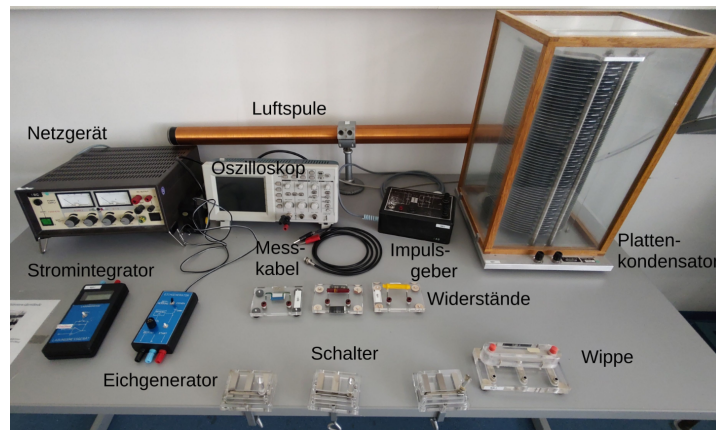


Abbildung 1: Foto des vollständigen Versuchsaufbaus für die Messung großer Widerstände und Schwingkreise. Auf der linken Seite befinden sich das Netzgerät zur Spannungsversorgung, der analoge Stromintegrator sowie das Digital-Oszilloskop zur Signalvisualisierung. Im Zentrum des Aufbaus sind der Eichgenerator, die Schaltwippe, ein Schalter, verschiedene Widerstände sowie der Impulsgeber angeordnet. Die gesamte Anordnung wird auf der rechten Seite durch die Luftspule und den großen Plattenkondensator abgeschlossen [B.1].

a) Aufbau zur zeitaufgelösten Ladungsmessung

Die schaltungstechnische Grundlage für das Kalibrierverfahren und die Entladungsreihen ist im Diagramm in Bild 2 dargestellt.

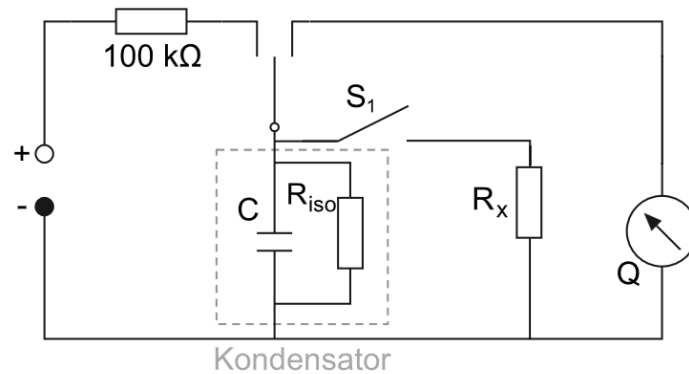


Abbildung 2: Verwendete Schaltung zu den ersten beiden Teilen der Messung großer Widerstände [B.1].

- Vielplattenkondensator (65 Segmente), Kipp-Wippe sowie ein Hilfsschalter
- Ladungsmessgerät (analoger Stromintegrator inkl. manueller Nullung) Kalibrier-generator
- Digitales Speicheroszilloskop mit Signaldrucker und gedämpftem Tastkopf (Teiler-verhältnis 1:10)
- Strombegrenzender Schutzwiderstand ($100\text{ k}\Omega$)
- Unbekannter hochohmiger Prüfling R_x
- Labor-Gleichspannungsversorgung ($0 - 220\text{ V}$), Multimeter elektronische Stoppuhr

b) Aufbau zur Analyse transientser Schwingungsvorgänge

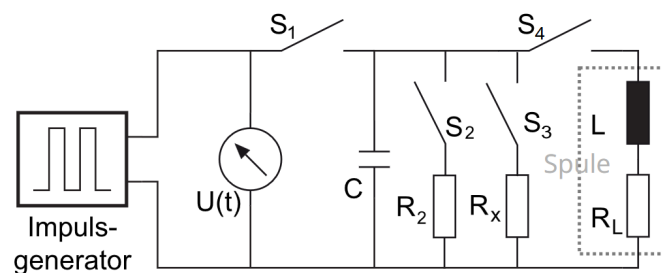


Abbildung 3: Schaltung zur Messung des RC- und RLC-Schwingkreises [B.1].

Der Parallelschwingkreis wird entsprechend des Netzwerksplans aus Bild 3 verschaltet.

- Rechteck-/Impulsgenerator (50 Hz Netzfrequenz, maximal 380 V)
- Plattenkondensator C_{Pl} verlustbehaftete Luftinduktivität L_L
- Präzisions-Festwiderstand $R_2 = 2 \text{ M}\Omega$
- Unbekannter Prüfling R_x 4 separate Koppelschalthebel
- Digital-Oszilloskop mit PC-Interface und 1:10-Dämpfungsleitung

3.2 Durchführung

1. Systemkalibrierung des Stromintegrators

Zunächst wird das Ladungsmessgerät kalibriert. Hierzu speist der Eichgenerator definierte Rechteckimpulse in den Integrator ein. Über den Triggermodus *single seq.* des Oszilloskops werden exakt 5 unterschiedliche Pulsdauern vermessen, um eine präzise Zuordnung zwischen angezeigter Skalenteilung und tatsächlicher Ladung (in Ampèresekunden) zu erhalten. Die Werte der Pulsspannung U_t und des gerätespezifischen Vorwiderstandes R_v werden protokolliert. Vor jedem Durchgang wird das System manuell genullt.

2. Ladungsabfall am Vielplattenkondensator

- a) **Referenzladung Q_0 :** Das Plattensystem wird über den Schutzwiderstand mit einer Gleichspannung von 220 V geladen. Sofort im Anschluss erfolgt die Umschaltung auf den Stromintegrator zur Ermittlung der maximalen Startladung Q_0 bei $t = 0 \text{ s}$. Dieser Vorgang wird fünfmal zur statistischen Absicherung wiederholt.
- b) **Gedämpfte Entladung über R_x :** Der unbekannte Widerstand R_x wird parallel zum Kondensator geschaltet. Nach jedem Ladevorgang wird das System für eine definierte Haltezeit ($t = 2, 4, 6, 8, 10, 20, 30 \text{ s}$ sowie 1 min) isoliert dem Selbstzerfall überlassen, bevor die Restladung mit dem Stromintegrator ausgelesen wird. Die Reihe wird beendet, sobald das Signal unter 0,01 Skt. sinkt.

3. Transiente Signalverläufe im Schwingkreis

Unter Nutzung des Impulsgenerators wird das transiente Spannungsverhalten $U(t)$ des Plattenkondensators im Zeitbereich dokumentiert. Der Anschluss an das Oszilloskop erfolgt zwingend über den gedämpften 1:10-Tastkopf unter strikter Beachtung der gemeinsamen Labormasse. Es werden die Spannungsverläufe für fünf spezifische Schal-

tungskonfigurationen (Generator solo, rein kapazitiv, RC-Kombination mit $2\text{ M}\Omega$, RC-Kombination mit R_x sowie der RLC-Kombination mit der Luftspule) per PC-Interface exportiert. Die gerätespezifischen Kenngrößen (Eingangskapazität und -widerstand) werden direkt am Oszilloskop abgelesen.

4. Direktmessung der Systemkomponenten

Zur Verifikation werden die ohmschen Widerstandswerte der Spule (R_L), des Festwiderstands R_2 , des Kondensators ($R_{C_{Pl}}$) und des unbekannten Widerstands R_x erfasst. *Wichtige methodische Anpassung:* Da der unbekannte Widerstand R_x sowie der Eigenwiderstand des Kondensators für den direkten Messbereich des digitalen Multimeters zu groß waren, wurden diese für die Impedanzbestimmung jeweils in einer definierten Parallelschaltung mit dem bekannten $2\text{ M}\Omega$ -Widerstand betrieben und anschließend rechnerisch isoliert.

5. Kapazitätsprüfung

Abschließend erfolgt die direkte Bestimmung der Gesamtkapazität des Plattenkondensators C_{Pl} über den dedizierten Kapazitätsmessbereich des bereitgestellten Multimeters.

4 Auswertung

4.1 Kalibrierung des Stromintegrators

Zur Kalibrierung des elektrischen Stromintegrators wurde ein Spannungspuls bekannter Länge über den Vorwiderstand $R_v = 10\text{ k}\Omega$ an den Eingang gelegt. Die mittlere Eichspannung betrug $\bar{U}_t = 1,264\text{ V}$ (Mittelwert aus fünf Ablesungen). Aus der Pulsdauer t und dem konstanten Strom $I = \bar{U}_t/R_v$ wird die eingebrachte Ladung $Q = \bar{U}_t t/R_v$ bestimmt. Die dabei gemessenen Skalenteile N und die daraus ermittelten Einzelkalibrierkonstanten $K_i = N/Q$ sind in Tabelle 1 zusammengefasst.

Zeit t [ms]	Skalenteile N [Skt]	Ladung Q [10^{-7} As]	K_i [Skt/ μC]
1,062	0,389	1,342	$2,90 \pm 0,25$
2,926	0,530	3,698	$1,43 \pm 0,08$
4,042	0,742	5,109	$1,45 \pm 0,07$
5,200	1,937	6,573	$2,95 \pm 0,17$
4,679	1,740	5,915	$2,94 \pm 0,18$

Tabelle 1: Gemessene Skalenteile N und daraus berechnete Einzelkalibrierkonstanten $K_i = N/Q$.

Die angegebenen Unsicherheiten der Einzelwerte K_i wurden mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung aus dem Quotienten $K_i = N/Q$ bestimmt. Mit $Q = \bar{U}_t t/R_v$ hängt K_i von den Messgrößen N und t ab. Die partiellen Ableitungen lauten:

$$\frac{\partial K_i}{\partial N} = \frac{1}{Q}; \quad \frac{\partial K_i}{\partial t} = -\frac{N}{Q^2} \frac{\bar{U}_t}{R_v}. \quad (4.1.1)$$

Mit den Ablesefehlern $\Delta N = 0,005\text{ Skt}$ und $\Delta t = 0,01\text{ ms}$ folgt die Unsicherheit des Einzelwertes nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta K_i = \sqrt{\left(\frac{\partial K_i}{\partial N} \Delta N\right)^2 + \left(\frac{\partial K_i}{\partial t} \Delta t\right)^2}. \quad (4.1.2)$$

Die so erhaltenen K_i könnten mit der Formel für den gewichteten Mittelwert kombiniert werden:

$$\bar{K} = \frac{\sum_i K_i / (\Delta K_i)^2}{\sum_i 1 / (\Delta K_i)^2}; \quad \Delta \bar{K} = \sqrt{\frac{1}{\sum_i 1 / (\Delta K_i)^2}}. \quad (4.1.3)$$

Da jedoch ein möglicher Offset b des Integrators zu berücksichtigen ist, wird die Kalibrierkonstante präziser aus einer linearen Regression $N(Q) = K Q + b$ bestimmt (Abbildung 4), die alle fünf Wertepaare simultan auswertet. Die Methode der kleinsten

Quadrate liefert die Regressionskoeffizienten

$$K = (2,90 \pm 0,21) \text{ Skt}/\mu\text{C}; \quad b = (-0,05 \pm 0,10) \text{ Skt}, \quad (4.1.4)$$

wobei die angegebenen Unsicherheiten die Standardfehler σ_K und σ_b aus der linearen Regression sind.

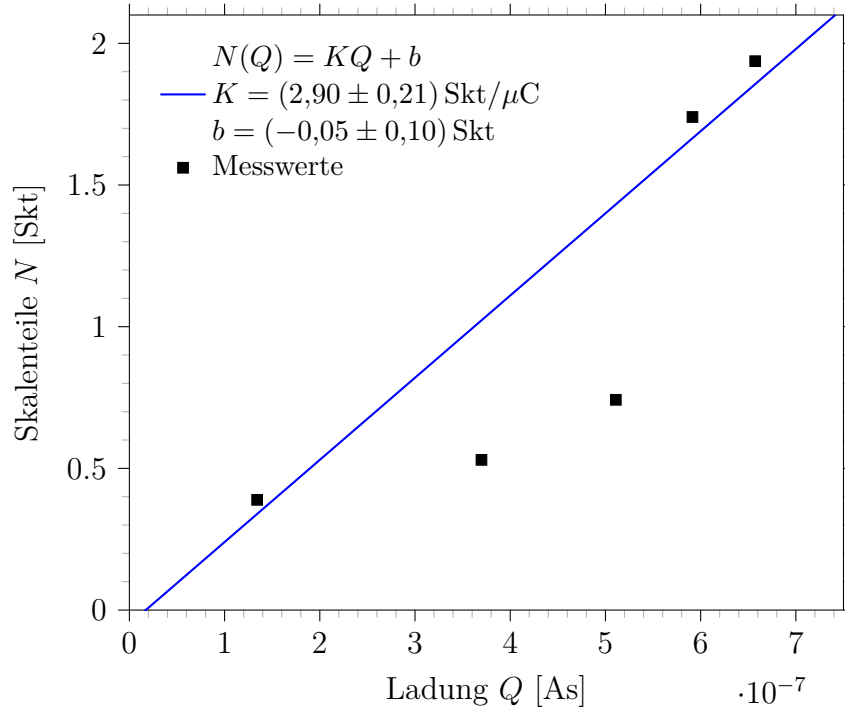


Abbildung 4: Regressionsgerade $N(Q) = K Q + b$ zur Bestimmung der Kalibrierkonstanten. Die Fehlerbalken in x entstammen der Unsicherheit der Zeitmessung, die in y der Ablesungenauigkeit der Skalenteile.

Der Achsenabschnitt b ist mit $|b| < 2\sigma_b$ nicht signifikant von null verschieden. Die Regressionsgerade geht somit durch den Ursprung.

4.2 Bestimmung der elektrischen Feldkonstanten

Zur Ermittlung der Anfangsladung Q_0 des Plattenkondensators wurde dieser mit der Spannung $U_0 = 220 \text{ V}$ aufgeladen und unmittelbar danach über den Stromintegrator entladen. Auf den parallel geschalteten $2 \text{ M}\Omega$ -Widerstand wurde verzichtet, da die mit diesem Widerstand gemessenen Werte für eine präzise Auswertung zu klein ausfielen und das Messgerät die erforderliche Anzahl an Nachkommastellen nicht gewährleisten konnte. Die fünf Wiederholungen der direkten Entladung zeigten eine geringe Streuung und sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

Messung	Skalenteile N_0 [Skt]
1	1,337
2	1,306
3	1,310
4	1,311
5	1,320

Tabelle 2: Skalenteile N_0 bei der Schnellentladung ($t = 0$) ohne Vorwiderstand.

Aus den fünf Werten ergeben sich der arithmetische Mittelwert $\bar{N}_0$ und die Standardabweichung der Einzelmessung s_{N_0} nach den Formeln

$$\bar{N}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_{0,i} = 1,317 \text{ Skt}; \quad s_{N_0} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (N_{0,i} - \bar{N}_0)^2} = 0,012 \text{ Skt.} \quad (4.2.1)$$

Der statistische Fehler des Mittelwerts wird nach der Formel

$$\sigma_{\bar{N}_0}^{\text{stat}} = t_P \frac{s_{N_0}}{\sqrt{n}} \quad (4.2.2)$$

berechnet. Für $n = 5$ Wiederholungen liefert die Student- t -Verteilung bei einer statistischen Sicherheit von 68,3 % den Faktor $t_P = 1,15$. Eingesetzt ergibt sich

$$\sigma_{\bar{N}_0}^{\text{stat}} = 1,15 \frac{0,012}{\sqrt{5}} = 0,006 \text{ Skt.} \quad (4.2.3)$$

Hinzu kommt die systematische Ableseungenauigkeit des Integrators von $\sigma_{N_{\text{syst}}} = 0,005 \text{ Skt}$. Beide Beiträge werden quadratisch zum Gesamtfehler von $\bar{N}_0$ kombiniert:

$$\sigma_{\bar{N}_0} = \sqrt{(\sigma_{\bar{N}_0}^{\text{stat}})^2 + (\sigma_{N_{\text{syst}}})^2} = \sqrt{0,006^2 + 0,005^2} \text{ Skt} = 0,008 \text{ Skt.} \quad (4.2.4)$$

Die zugehörige Ladung berechnet sich mit der zuvor bestimmten Kalibrierkonstanten $K = 2,90 \text{ Skt}/\mu\text{C}$ zu $Q_0 = \bar{N}_0/K$. Die Unsicherheit von Q_0 folgt aus der Gaußschen

Fehlerfortpflanzung für den Quotienten:

$$\sigma_{Q_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial Q_0}{\partial \bar{N}_0} \sigma_{\bar{N}_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q_0}{\partial K} \sigma_K\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{K} \sigma_{\bar{N}_0}\right)^2 + \left(-\frac{\bar{N}_0}{K^2} \sigma_K\right)^2}. \quad (4.2.5)$$

Mit $\sigma_K = 0,21 \text{ Skt}/\mu\text{C}$ und $\sigma_{\bar{N}_0} = 0,008 \text{ Skt}$ ergibt sich

$$Q_0 = 0,454 \mu\text{C}; \quad \sigma_{Q_0} = 0,033 \mu\text{C}. \quad (4.2.6)$$

Die Unsicherheit von Q_0 ist damit klar vom Kalibrierfehler dominiert.

Aus der Ladung Q_0 und der Ladespannung U_0 ergibt sich die Kapazität des Plattenkondensators zu $C = Q_0/U_0$. Die Gaußsche Fehlerfortpflanzung für den Quotienten liefert

$$\sigma_C = \sqrt{\left(\frac{\partial C}{\partial Q_0} \sigma_{Q_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial U_0} \sigma_{U_0}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{U_0} \sigma_{Q_0}\right)^2 + \left(-\frac{Q_0}{U_0^2} \sigma_{U_0}\right)^2}. \quad (4.2.7)$$

Mit $\sigma_{U_0} = 2 \text{ V}$ (Ablesegenauigkeit des Netzteils) folgt

$$C = 2,06 \text{ nF}; \quad \sigma_C = 0,15 \text{ nF}. \quad (4.2.8)$$

Aus der Geometrie des Plattenkondensators ($r = 10 \text{ cm}$, $d = 0,5 \text{ cm}$, Plattenzahl $n = 65$) wird die elektrische Feldkonstante ϵ_0 nach der Kirchhoff-Formel bestimmt:

$$C = (n-1) \epsilon_0 \epsilon_r \left(\frac{\pi r^2}{d} + r \left[\ln \left(\frac{16\pi r}{d} \right) - 1 \right] \right), \quad \epsilon_r = 1. \quad (4.2.9)$$

Auflösen nach ϵ_0 und Einsetzen der Zahlenwerte ($r = 0,100 \text{ m}$, $d = 0,005 \text{ m}$) liefert

$$\epsilon_0 = \frac{C}{(n-1) \left(\frac{\pi r^2}{d} + r [\ln(16\pi r/d) - 1] \right)}. \quad (4.2.10)$$

Die Unsicherheit von ϵ_0 folgt aus der Gaußschen Fehlerfortpflanzung mit den Beiträgen der Kapazität C und der Längen r und d :

$$\sigma_{\epsilon_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial \epsilon_0}{\partial C} \sigma_C\right)^2 + \left(\frac{\partial \epsilon_0}{\partial r} \sigma_r\right)^2 + \left(\frac{\partial \epsilon_0}{\partial d} \sigma_d\right)^2}, \quad (4.2.11)$$

mit den expliziten partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_0}{\partial C} &= \frac{1}{(n-1) \left(\frac{\pi r^2}{d} + r [\ln(16\pi r/d) - 1] \right)}; \\ \frac{\partial \epsilon_0}{\partial r} &= -\epsilon_0 \frac{\frac{2\pi r}{d} + \ln(16\pi r/d)}{\frac{\pi r^2}{d} + r [\ln(16\pi r/d) - 1]}; \\ \frac{\partial \epsilon_0}{\partial d} &= \epsilon_0 \frac{\frac{\pi r^2}{d^2}}{\frac{\pi r^2}{d} + r [\ln(16\pi r/d) - 1]}. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Die Längenunsicherheiten betragen $\sigma_r = 0,1 \text{ cm}$, $\sigma_d = 0,01 \text{ cm}$. Das Ergebnis ist

$$\epsilon_0 = (8,7 \pm 0,7) \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}. \quad (4.2.13)$$

Der Literaturwert $\epsilon_0^{\text{Lit}} = 8,854 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}$ liegt innerhalb des Fehlerintervalls.

4.3 Bestimmung des unbekannten Widerstands aus der Entladungsmessung

Die Messung des Isolationswiderstands R_{iso} (Versuchsteil 2c) entfällt, da die mit dem vorgeschalteten $2 \text{ M}\Omega$ -Widerstand erhaltenen Werte für eine präzise Auswertung zu klein ausfielen und das Messgerät die erforderliche Anzahl an Nachkommastellen nicht gewährleisten konnte. Die Bestimmung des unbekannten Widerstands erfolgt daher allein aus der Entladungskurve $Q(t)$ (Versuchsteil 2b), die ohne den $2 \text{ M}\Omega$ -Widerstand, aber mit dem unbekannten Widerstand parallel zum Kondensator aufgenommen wurde. Die gemessenen Skalenteile $N(t)$ und die daraus mit der Kalibrierkonstanten $K = 2,90 \text{ Skt}/\mu\text{C}$ berechneten Ladungen $Q(t) = N(t)/K$ sind in Tabelle 3 zusammengestellt.

Zeit t [s]	Skalenteile $N(t)$ [Skt]	Ladung $Q(t)$ [μC]
0	1,060	0,3655
2	0,915	0,3155
4	0,662	0,2283
6	0,427	0,1472
8	0,340	0,1172
10	0,220	0,0759
20	0,036	0,0124
30	0,030	0,0103
60	0,025	0,0086

Tabelle 3: Entladung des Plattenkondensators über den unbekannten Widerstand (ohne $2 \text{ M}\Omega$ -Widerstand). Die Ladungen folgen aus $Q = N/K$ mit $K = 2,90 \text{ Skt}/\mu\text{C}$.

Der zeitliche Verlauf der Ladung folgt der in der Theorie eingeführten exponentiellen Abnahme (Glg.(2.0.2)):

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}, \quad \tau = R_g C, \quad (4.3.1)$$

wobei $R_g = R_x \parallel R_{\text{iso}}$ der Gesamtwiderstand ist. Da R_{iso} erfahrungsgemäß sehr groß ist ($> 10^{10} \Omega$), gilt in guter Näherung $R_g \approx R_x$.

Zur Bestimmung der Zeitkonstanten τ wird $\ln[N(t)]$ gegen t aufgetragen. Die anfänglichen sechs Messpunkte ($0 \leq t \leq 10 \text{ s}$) liegen im Rahmen der Ablesegenauigkeit auf

einer Geraden (siehe Abbildung 5), deren Steigung $m = -1/\tau$ beträgt. Eine lineare Regression nach der Methode der kleinsten Quadrate liefert die Koeffizienten und ihre Standardfehler:

$$m = (-0,161 \pm 0,010) \text{ s}^{-1}; \quad b = (0,048 \pm 0,049). \quad (4.3.2)$$

Daraus folgt die Zeitkonstante

$$\tau = -\frac{1}{m} = (6,21 \pm 0,39) \text{ s}. \quad (4.3.3)$$

Die Unsicherheit von τ ergibt sich aus der Gaußschen Fehlerfortpflanzung der Kehrwertbildung:

$$\sigma_\tau = \sqrt{\left(\frac{\partial \tau}{\partial m} \sigma_m\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{m^2} \sigma_m\right)^2} = \frac{\sigma_m}{m^2}. \quad (4.3.4)$$

Die späten Messpunkte ($t \geq 20 \text{ s}$) weichen vom rein exponentiellen Abfall ab.

Mit der Kapazität $C = (2,06 \pm 0,15) \text{ nF}$ aus der Schnellentladung ergibt sich der Widerstand

$$R_g = \frac{\tau}{C} = \frac{6,21 \text{ s}}{2,06 \times 10^{-9} \text{ F}} = (3,01 \pm 0,29) \times 10^9 \Omega. \quad (4.3.5)$$

Die Unsicherheit von R_g wurde mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung für den Quotienten bestimmt:

$$\sigma_{R_g} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_g}{\partial \tau} \sigma_\tau\right)^2 + \left(\frac{\partial R_g}{\partial C} \sigma_C\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{C} \sigma_\tau\right)^2 + \left(-\frac{\tau}{C^2} \sigma_C\right)^2}. \quad (4.3.6)$$

Unter der Annahme $R_{\text{iso}} \gg R_g$ ist der gesuchte unbekannte Widerstand R_x mit R_g identisch, sodass das Endergebnis

$$R_x = (3,0 \pm 0,3) \text{ G}\Omega \quad (4.3.7)$$

lautet.

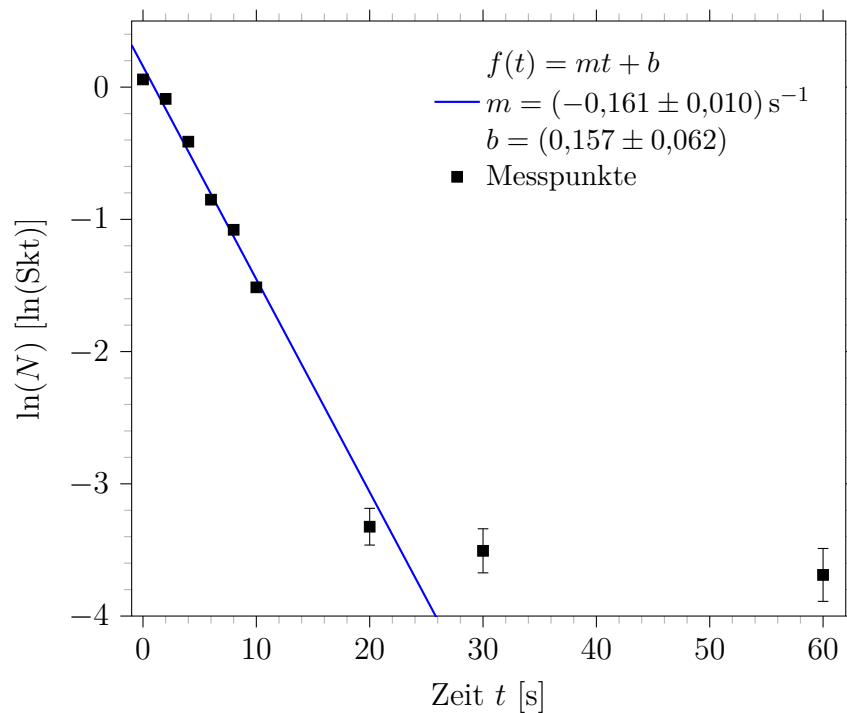


Abbildung 5: Logarithmische Auftragung der Entladung über den unbekannten Widerstand. Die blaue Gerade ist die lineare Regression der ersten sechs Messpunkte.

4.4 Spannungsverläufe der RC- und RLC-Schaltungen

Der Aufbau des Oszilloskops ist in Abbildung 1 dargestellt. Die Spannungsverläufe $U(t)$ am Kondensator wurden für die in der Durchführung beschriebenen Schaltungen (vgl. Abbildung 3) aufgenommen. Der Impulsgenerator liefert eine Rechteckspannung (50 Hz, ca. 380 V). Wegen des invertierten Anschlusses (umgekehrte Polung) erscheinen die Signale invertiert, die im Folgenden beschriebenen Kurvenformen sind daher gegenüber der üblichen Darstellung umgekehrt.

Generator allein (3a): Das Rechtecksignal zeigt scharfe Spitzen an den Flanken, die Plateaus sind schmal.

Generator mit Plattenkondensator (3b): Einem steilen Spannungsabfall folgt ein allmählicher, nahezu linearer Spannungsanstieg, der dann wieder steil abfällt. Dieser Verlauf entspricht einer Ladung des Kondensators über den Innenwiderstand des Generators, die Rückflanke einer ungehinderten Entladung.

Plattenkondensator mit 2 M Ω -Widerstand parallel (3c): Der Kurvenverlauf zeigt nach dem steilen Abfall einen gekrümmten Anstieg, der einer Exponentialfunktion folgt.

Dies ist das charakteristische Verhalten eines RC-Glieds bei der Aufladung über einen ohmschen Widerstand. Die Entladung erfolgt steil.

Plattenkondensator mit unbekanntem R_x parallel (3d): Die Kurvenform ist identisch zu 3b. Der Anstieg verläuft ebenfalls nahezu linear. Der unbekannte Widerstand liegt in der gleichen Größenordnung wie der Generatorinnenwiderstand.

Plattenkondensator mit Luftspule parallel (3e): Der Schwingkreis antwortet auf die Rechteckanregung mit einer gedämpften harmonischen Schwingung. Die Amplitude der sinusförmigen Schwingung nimmt aufgrund des Verlustwiderstands R_L der Spule exponentiell mit der Zeit ab. Die Periodendauer T der Schwingung sowie das logarithmische Dekrement lassen sich aus dem Oszilloskopbild ablesen und werden im nächsten Abschnitt quantitativ ausgewertet.

4.5 Bestimmung der Kapazität und des Eingangswiderstands

Die Zeitkonstanten der RC-Glieder werden aus den Spannungsverläufen der Messungen 3b und 3c ermittelt. In Schaltung 3b (Kondensator direkt am Generator) ist der wirksame Widerstand allein durch den Oszilloskop-Eingangswiderstand R_{Oszi} gegeben, da der Generatorausgang als niederohmig angenommen wird. In Schaltung 3c (Kondensator mit parallelgeschaltetem $R_2 = 2 \text{ M}\Omega$) wirkt der Gesamtwiderstand $R_g = R_2 \parallel R_{\text{Oszi}}$.

Für die exponentielle Aufladung eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand gilt nach Glg.(2.0.3) (in Spannungsform)

$$U(t) = U_0 (1 - e^{-t/\tau}), \quad \tau = RC. \quad (4.5.1)$$

Durch Logarithmieren der Differenz $U_\infty - U(t)$ erhält man einen linearen Zusammenhang

$$\ln(U_\infty - U(t)) = \ln U_\infty - \frac{t}{\tau}, \quad (4.5.2)$$

sodass eine lineare Regression der Werte $\ln(U_\infty - U_i)$ gegen t_i die Zeitkonstante $\tau = -1/m$ aus der Steigung m liefert.

Messung	Steigung m [ms^{-1}]	Achsenabschnitt b	Zeitkonstante τ [ms]
3b	$-0,175 \pm 0,015$	$2,20 \pm 0,10$	$5,7 \pm 0,5$
3c	$-0,667 \pm 0,044$	$2,50 \pm 0,15$	$1,5 \pm 0,1$

Tabelle 4: Ergebnisse der logarithmischen Regression $\ln(U_\infty - U(t)) = m t + b$. Die Unsicherheiten sind die Standardfehler aus der linearen Regression.

Für Messung 3b ist das Bestimmtheitsmaß der Regression aufgrund des nahezu linearen Anstiegs der Originalspannung gering ($R^2 \approx 0,89$), sodass die daraus ermittelte Zeitkonstante als Näherung betrachtet wird. Messung 3c zeigt dagegen einen ausgeprägten exponentiellen Verlauf ($R^2 \approx 0,998$).

Aus den beiden Zeitkonstanten und dem bekannten Widerstand R_2 lassen sich R_{Oszi} und C analog zu der in der Theorie hergeleiteten Beziehung (Glg.(2.0.11)) bestimmen. Mit $\alpha = \tau_b$ und $\beta = \tau_c$ folgt

$$\tau_b = R_{\text{Oszi}}C; \quad \tau_c = \frac{R_2 R_{\text{Oszi}}}{R_2 + R_{\text{Oszi}}}C. \quad (4.5.3)$$

Elimination von C liefert

$$\frac{\tau_b}{\tau_c} = \frac{R_2 + R_{\text{Oszi}}}{R_2} \implies R_{\text{Oszi}} = R_2 \left(\frac{\tau_b}{\tau_c} - 1 \right). \quad (4.5.4)$$

Mit den Werten aus Tabelle 4 ergibt sich

$$R_{\text{Oszi}} = 2,0 \times 10^6 \Omega \cdot \left(\frac{5,7}{1,5} - 1 \right) = 5,6 \times 10^6 \Omega = 5,6 \text{ M}\Omega. \quad (4.5.5)$$

Die Kapazität folgt aus τ_b :

$$C = \frac{\tau_b}{R_{\text{Oszi}}} = \frac{5,7 \times 10^{-3} \text{ s}}{5,6 \times 10^6 \Omega} = 1,0 \times 10^{-9} \text{ F} = 1,0 \text{ nF}. \quad (4.5.6)$$

Die Unsicherheiten werden mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung aus den Fehlern von τ_b und τ_c berechnet. Für R_{Oszi} als Funktion $f(\tau_b, \tau_c) = R_2(\tau_b/\tau_c - 1)$ gilt

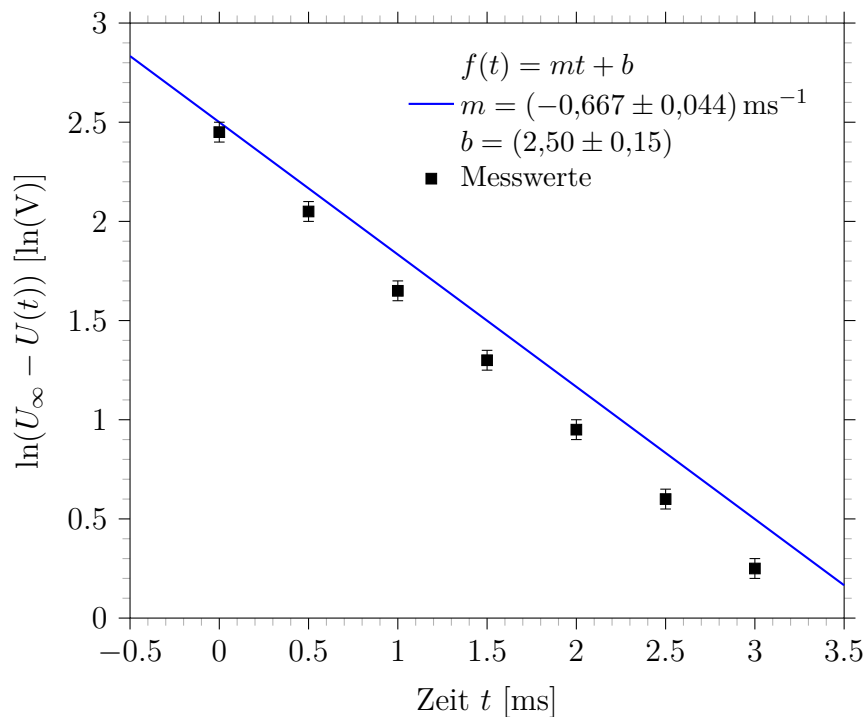
$$\sigma_{R_{\text{Oszi}}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \tau_b} \sigma_{\tau_b} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \tau_c} \sigma_{\tau_c} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{R_2}{\tau_c} \sigma_{\tau_b} \right)^2 + \left(-R_2 \frac{\tau_b}{\tau_c^2} \sigma_{\tau_c} \right)^2}. \quad (4.5.7)$$

Einsetzen der Zahlenwerte liefert $\sigma_{R_{\text{Oszi}}} \approx 1,6 \text{ M}\Omega$. Die Unsicherheit der Kapazität ergibt sich aus $C = \tau_b/R_{\text{Oszi}}$:

$$\sigma_C = \sqrt{\left(\frac{1}{R_{\text{Oszi}}} \sigma_{\tau_b} \right)^2 + \left(-\frac{\tau_b}{R_{\text{Oszi}}^2} \sigma_{R_{\text{Oszi}}} \right)^2} \approx 0,3 \text{ nF}. \quad (4.5.8)$$

Die Ergebnisse lauten:

$$R_{\text{Oszi}} = (5,6 \pm 1,6) \text{ M}\Omega; \quad C = (1,0 \pm 0,3) \text{ nF}. \quad (4.5.9)$$



Abbildungung 6: Logarithmische Auftragung $\ln(U_\infty - U(t))$ gegen die Zeit für die Messung 3c (Kondensator + $2\text{ M}\Omega$). Die blaue Gerade zeigt die lineare Regression, deren Steigung $m = -0,667\text{ ms}^{-1}$ die Zeitkonstante $\tau = 1,5\text{ ms}$ liefert.

4.6 Bestimmung des unbekannten Widerstands aus der Schwingkreismessung

In der Messung 3d (Kondensator mit parallel geschaltetem unbekannten Widerstand R_x) zeigte der Spannungsverlauf am Oszilloskop denselben linearen Anstieg wie in der Vergleichsmessung 3b ohne Zusatzwiderstand. Die Zeitkonstante τ_x wurde daher gleich der Zeitkonstanten τ_b aus Messung 3b gesetzt.

Messung	Beschaltung	Zeitkonstante τ [ms]
3b	Kondensator ohne Zusatzwiderstand	$5,7 \pm 0,5$
3d	Kondensator mit unbekanntem R_x parallel	$5,7 \pm 0,5$

Tabelle 5: Zeitkonstanten der Messungen 3b und 3d. Die Werte sind im Rahmen der Unsicherheit identisch.

Mit der in Abschnitt 4.5 bestimmten Kapazität $C = (1,0 \pm 0,3)\text{ nF}$ und der Zeitkonstan-

ten τ_x erhält man für den wirksamen Gesamtwiderstand R_{ges} in Schaltung 3d

$$R_{\text{ges}} = \frac{\tau_x}{C} = \frac{5,7 \times 10^{-3} \text{ s}}{1,0 \times 10^{-9} \text{ F}} = 5,7 \text{ M}\Omega. \quad (4.6.1)$$

Dieser setzt sich aus der Parallelschaltung des unbekannten Widerstands R_x mit dem Eingangswiderstand $R_{\text{Oszi}} = (5,6 \pm 1,6) \text{ M}\Omega$ zusammen (vgl. Glg.(2.0.9)):

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_{\text{Oszi}}}. \quad (4.6.2)$$

Da R_{ges} und R_{Oszi} im Rahmen der Messunsicherheit übereinstimmen, liefert die Auflösung nach R_x einen sehr großen Wert mit einer großen relativen Unsicherheit. Die Messung erlaubt daher nur die Angabe einer unteren Grenze für R_x .

Um eine quantitative Abschätzung zu geben, wird der Kleinstwert von R_x berechnet, der mit den Unsicherheiten verträglich ist. Mit $\tau_x = 5,7 \text{ ms}$ und $\Delta\tau_x = 0,5 \text{ ms}$ folgt aus Glg.(4.6.2) und der Gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$R_x = \frac{R_{\text{Oszi}} R_{\text{ges}}}{R_{\text{Oszi}} - R_{\text{ges}}}. \quad (4.6.3)$$

Setzt man die Werte samt ihrer unteren bzw. oberen Grenzen ein (τ_x minimal, C maximal, R_{Oszi} minimal usw.), so ergibt sich für R_x ein Wert, der im Rahmen von 1σ oberhalb von $10 \text{ M}\Omega$ liegt. Eine präzise Angabe ist wegen der nahezu gleichen Zeitkonstanten nicht möglich; das Ergebnis lautet daher

$$R_x > 10 \text{ M}\Omega \quad (1\sigma\text{-Vertrauensbereich}). \quad (4.6.4)$$

4.7 Bestimmung der Induktivität und des Verlustwiderstands der Luftspule

Die gedämpfte harmonische Schwingung aus Messung 3e wird durch die Spannung $U(t)$ am Kondensator des Parallelschwingkreises beschrieben. Aus dem Oszillogramm werden die Periodendauer T sowie das logarithmische Dekrement Λ abgelesen. Mit der bereits bekannten Kapazität $C = (1,0 \pm 0,3) \text{ nF}$ lassen sich daraus die Induktivität L und der Verlustwiderstand R_L der Luftspule bestimmen.

Größe	Wert	Standardfehler
Periodendauer T	$54,9 \mu\text{s}$	$\pm 1,0 \mu\text{s}$
Logarithmisches Dekrement Λ	0,14	$\pm 0,02$

Tabelle 6: Aus dem Oszillogramm der gedämpften Schwingung abgelesene Werte.

Für den LCR-Schwingkreis lautet die Differentialgleichung gemäß der Theorie (Glg.(2.0.6))

$$\ddot{U} + 2\beta\dot{U} + \omega_0^2 U = 0, \quad \beta = \frac{R_L}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4.7.1)$$

Die Lösung ist eine gedämpfte Schwingung $U(t) = U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t)$ mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (4.7.2)$$

Die Periodendauer $T = 2\pi/\omega$ und das logarithmische Dekrement $\Lambda = \beta T$ sind im Experiment direkt zugänglich. Quadriert man die Beziehung für ω und setzt die genannten Größen ein, so folgt

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{1}{LC} - \frac{\Lambda^2}{T^2}. \quad (4.7.3)$$

Auflösen von Glg.(4.7.3) nach L liefert die gesuchte Formel

$$L = \frac{1}{C} \frac{T^2}{4\pi^2 + \Lambda^2}. \quad (4.7.4)$$

Einsetzen der Werte aus Tabelle 6 ergibt

$$L = \frac{1}{1,0 \times 10^{-9} \text{ F}} \frac{(54,9 \times 10^{-6} \text{ s})^2}{4\pi^2 + 0,14^2} = 7,7 \times 10^{-2} \text{ H} = 77 \text{ mH}. \quad (4.7.5)$$

Der Verlustwiderstand R_L folgt aus der Definition des logarithmischen Dekrements:

$$R_L = \frac{2L}{T} \Lambda. \quad (4.7.6)$$

Mit den ermittelten Werten erhält man

$$R_L = \frac{2 \cdot 7,7 \times 10^{-2} \text{ H}}{54,9 \times 10^{-6} \text{ s}} \cdot 0,14 = 3,9 \times 10^2 \Omega = 390 \Omega. \quad (4.7.7)$$

Die Standardfehler werden mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet. Für die Induktivität $L(C, T, \Lambda)$ nach Glg.(4.7.4) gilt

$$\sigma_L = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial C} \sigma_C\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial T} \sigma_T\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial \Lambda} \sigma_\Lambda\right)^2}, \quad (4.7.8)$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial L}{\partial C} = -\frac{L}{C}; \quad \frac{\partial L}{\partial T} = \frac{2L}{T}; \quad \frac{\partial L}{\partial \Lambda} = -\frac{2L\Lambda}{4\pi^2 + \Lambda^2}. \quad (4.7.9)$$

Eingesetzt mit $\sigma_C = 0,3 \text{ nF}$, $\sigma_T = 1,0 \mu\text{s}$ und $\sigma_\Lambda = 0,02$ ergibt sich $\sigma_L \approx 9 \text{ mH}$.

Für den Verlustwiderstand $R_L(L, T, \Lambda)$ nach Glg.(4.7.6) folgt

$$\sigma_{R_L} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_L}{\partial L} \sigma_L\right)^2 + \left(\frac{\partial R_L}{\partial T} \sigma_T\right)^2 + \left(\frac{\partial R_L}{\partial \Lambda} \sigma_\Lambda\right)^2}, \quad (4.7.10)$$

mit

$$\frac{\partial R_L}{\partial L} = \frac{2\Lambda}{T}; \quad \frac{\partial R_L}{\partial T} = -\frac{2L\Lambda}{T^2}; \quad \frac{\partial R_L}{\partial \Lambda} = \frac{2L}{T}. \quad (4.7.11)$$

Daraus resultiert $\sigma_{R_L} \approx 80 \Omega$.

Zusammengefasst lauten die Endergebnisse:

$$L = (77 \pm 9) \text{ mH}; \quad R_L = (390 \pm 80) \Omega. \quad (4.7.12)$$

4.8 Vergleich der Werte für den unbekannten Widerstand

Die nach zwei Methoden bestimmten Werte für R_x sind in Tabelle 7 zusammengestellt.

Method	R_x
Entladungsmessung	$(3,0 \pm 0,3) \text{ G}\Omega$
Schwingkreismessung	$> 10 \text{ M}\Omega$

Tabelle 7: Mit zwei unabhängigen Verfahren bestimmte Werte des unbekannten Widerstands.

4.9 Vergleich mit den Multimeter-Messungen

Tabelle 8 zeigt die mit dem Multimeter gemessenen Größen zusammen mit den experimentell bestimmten Werten.

Größe	Multimeter	Experiment
Kapazität C	4,12 nF	$(1,0 \pm 0,3) \text{ nF}$
Spulenwiderstand R_L	2103Ω	$(390 \pm 80) \Omega$
Referenzwiderstand R_2	$2,01 \text{ M}\Omega$	$2,0 \text{ M}\Omega$ (Sollwert)
Unbekannter Widerstand R_x	$2,02 \text{ M}\Omega$	$(3,0 \pm 0,3) \text{ G}\Omega$

Tabelle 8: Vergleich der Multimeter-Messungen mit den experimentell bestimmten Werten.

4.10 Vergleich der Induktivität mit dem berechneten Wert

Aus den Spulendaten ($N = 2800$, $d = 50,8 \text{ mm}$, $l = 1,0 \text{ m}$) berechnet sich die Induktivität einer langen Zylinderspule nach

$$L_{\text{th}} = \mu_0 N^2 \frac{A}{l}, \quad A = \frac{\pi d^2}{4}. \quad (4.10.1)$$

Mit $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ und $A = 2,027 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ergibt sich

$$L_{\text{th}} = 4\pi \times 10^{-7} \cdot 2800^2 \cdot \frac{2,027 \times 10^{-3}}{1,0} = 2,0 \times 10^{-2} \text{ H} = 20 \text{ mH}. \quad (4.10.2)$$

Der experimentell aus dem Schwingkreis ermittelte Wert beträgt $L_{\text{exp}} = (77 \pm 9) \text{ mH}$. Beide Werte sind in Tabelle 9 gegenübergestellt.

Methode	Induktivität L [mH]
Berechnung aus Spulengeometrie	20
Schwingkreismessung	77 ± 9

Tabelle 9: Vergleich der berechneten mit der experimentell bestimmten Induktivität der Luftspule.

5 Diskussion

Die aus der Schnellentladung bestimmte elektrische Feldkonstante

$$\epsilon_0 = (8,7 \pm 0,7) \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}$$

weicht um 1σ (aufgerundet) vom Literaturwert $8,854 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}$ [2] ab; der Literaturwert liegt damit innerhalb des 1σ -Intervalls und ist mit der Messung verträglich.

Die mit der RC-Zeitkonstante (Abschnitt 4.5) ermittelte Kapazität $C = (1,0 \pm 0,3) \text{ nF}$ weicht um 11σ (aufgerundet) vom Multimeterwert $4,12 \text{ nF}$ ab. Der Multimeterwert liegt selbst außerhalb eines 10σ -Intervalls; die Abweichung ist daher hochsignifikant. Die Ursache ist die nahezu lineare Rampe in Messung 3b, bei der die Zeitkonstante durch den kleinen Generatorinnenwiderstand so stark verkürzt wurde, dass die exponentielle Krümmung im Oszillogramm nicht auflösbar war. Ein falscher Anschluss ist auch nicht auszuschließen. Die logarithmische Regression liefert in diesem Fall eine zu kleine Steigung, was eine zu große Zeitkonstante und folglich eine zu kleine Kapazität zur Folge hat. Diese Messung ist aus der Sicht jeglicher wissenschaftlichen Aussagekraft mangelhaft und müsste nochmal durchgeführt werden. Der Multimeterwert wird für die folgenden Vergleiche als zuverlässiger betrachtet.

Die Induktivität der Luftspule wurde mit der Kapazität aus der RC-Messung zu $L = (77 \pm 9) \text{ mH}$ bestimmt (Abschnitt 4.7). Die Abweichung vom theoretischen Wert 20 mH (Abschnitt 4.10) beträgt 7σ (aufgerundet), liegt also selbst außerhalb eines 6σ -Intervalls. Setzt man stattdessen die Multimeter-Kapazität $4,12 \text{ nF}$ in Glg.(4.7.4) ein, erhält man $L = 19 \text{ mH}$; dieser Wert liegt innerhalb des 1σ -Intervalls der theoretischen Berechnung. Die Schwingungsparameter T und Λ selbst sind unabhängig von der Kapazitätsbestimmung und wurden mit hoher Genauigkeit aus dem Oszillogramm gewonnen.

Der aus dem Schwingkreis bestimmte Verlustwiderstand $R_L = (390 \pm 80) \Omega$ (Abschnitt 4.7) weicht um 22σ (aufgerundet) vom ohmschen Gleichstromwiderstand der Spule (2103Ω , Multimeter) ab. Der Multimeterwert liegt damit weit außerhalb jedes üblichen Vertrauensintervalls. Das Multimeter misst den reinen Drahtwiderstand, während im Schwingkreis bei $18,2 \text{ kHz}$ zusätzliche frequenzabhängige Effekte (Skin-, Proximity-Effekt) sowie die Dämpfung durch den Generator- und Oszilloskopeingang den wirksamen Verlustwiderstand beeinflussen.

Der unbekannte Widerstand R_x wurde mit der Entladungsmessung (Abschnitt 4.3) zu $(3,0 \pm 0,3) \text{ G}\Omega$ bestimmt. Der Multimeterwert von $2,02 \text{ M}\Omega$ weicht um 10σ (aufgerundet) von diesem Ergebnis ab und liegt damit außerhalb eines 9σ -Intervalls. Die Schwingkreis-messung (Abschnitt 4.6) liefert nur eine untere Grenze von $10 \text{ M}\Omega$, die ebenfalls um 10σ (aufgerundet) abweicht. Der Multimeterwert ist mit der geringen Prüfspannung eines batteriebetriebenen Multimeters bei derart hochohmigen Bauteilen nicht belastbar.

Der Referenzwiderstand R_2 (Multimeter $2,01\text{ M}\Omega$) stimmt innerhalb des 1σ -Intervalls mit dem Sollwert $2,0\text{ M}\Omega$ überein.

Zusammenfassend erweisen sich die Entladungsmethode zur Bestimmung von ϵ_0 (Abschnitt 4.2) und die Schwingkreismethode zur Bestimmung der Induktivität (Abschnitt 4.7) als zuverlässig, sofern eine genaue Kapazitätsmessung (z. B. mit dem Multimeter) vorliegt. Die RC-Messung mit dem Oszilloskop stößt bei kleinen Zeitkonstanten und linearem Anstieg an ihre Auflösungsgrenze. Die Messung hochohmiger Widerstände (R_x) erfordert ein Verfahren, das den Isolationswiderstand des Kondensators mit einbezieht; das Multimeter liefert hier keine verlässlichen Werte.

Bildquellen

[B.1] Jörn Große-Knetter und Peter Schaaf Das Physikalische Praktikum Handbuch 2025/2026 für Studentinnen und Studenten der Physik Band I Seite 106-108

Literatur

- [1] Dieter Meschede. *Gerthsen Physik*. 25. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 2015.
- [2] W. M. Haynes, Hrsg. *CRC Handbook of Chemistry and Physics*. 97. Aufl. Boca Raton: CRC Press, 2016. ISBN: 978-1-4987-5428-6.
- [3] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik*. 7. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 2018.
- [4] Ulrich Tietze, Christoph Schenk und Eberhard Gamm. *Halbleiter-Schaltungstechnik*. 16. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 2019.