

ANFÄNGERPRAKTIKUM DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK,
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Versuch 01
Gravitationswaage

Praktikant/in:	Vladislav Begert
E-Mail-Adresse:	v.begert@stud.uni-goettingen.de
Praktikant/in:	Christoph Kehl
E-Mail-Adresse:	christoph.kehl01@stud.uni-goettingen.de
Betreuer/in:	Mathis Klever
Datum der Durchführung:	06.12.2025

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	4
2.1	Gravitationsgesetz	4
2.2	Versuchsaufbau	5
2.3	Herleitung der Gravitationskonstante	6
3	Durchführung	8
4	Auswertung	9
4.1	Messreihe 1	9
4.2	Messreihe 2	11
4.3	Fehlerrechnung	12
5	Diskussion	14

1 Einleitung

Dieser Versuch dient der Bestimmung der **Gravitationskonstante** (Formelzeichen **G** bzw. γ). Hierbei handelt es sich um eine der grundlegendsten und wichtigsten Naturkonstanten der Physik. Mithilfe dieser Naturkonstante ist es beispielsweise möglich, die Masse der Erde zu bestimmen.

Die experimentelle Bestimmung der Gravitationskonstante γ gilt seit der Formulierung des Gravitationsgesetzes durch Sir Isaac Newton (1643–1727) im Jahr 1687 in den *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* als besonders anspruchsvoll. Aufgrund der geringen Stärke der Gravitationskraft und der fehlenden Abschirmbarkeit zählt γ bis heute zu den am wenigsten exakt bestimmten Naturkonstanten der Physik.

In diesem Versuch soll γ mithilfe einer **Gravitationswaage** nach dem britischen Physiker Henry Cavendish (1731–1810) bestimmt werden.

2 Theorie

2.1 Gravitationsgesetz

Newton erkannte die **Gravitationsanziehung zwischen zwei Massen** unter anderem aus der Beobachtung, dass der Fall eines Apfels von einem Baum auf den Boden durch einen physikalischen Zusammenhang beschrieben werden kann. Hierbei wird der von einem Baum fallende Apfel von der Erde angezogen. Diese Anziehung wirkt jedoch nicht ausschließlich zwischen Erde und Apfel, sondern allgemein zwischen allen Massen.

Diese Beobachtung motivierte Newton zur Formulierung des **Gravitationsgesetzes**. Demzufolge ist die Gravitationskraft eine physikalische Kraft, die zwischen zwei Massen M_1 und M_2 in einem Abstand r wirkt:

$$\vec{F} = \gamma \frac{M_1 M_2}{r^2} \vec{e}_r \quad (1)$$

Hierbei bezeichnet $\vec{e}_r$ den radialen Einheitsvektor entlang der Verbindungslinie der beiden Massen. γ ist die **Gravitationskonstante**, welche die Stärke der Gravitationskraft zwischen zwei Einheitsmassen bei einem Einheitsabstand bestimmt. Diese Proportionalitätskonstante lässt sich ausschließlich experimentell bestimmen und zählt zu den am wenigsten exakt bestimmten Naturkonstanten der Physik.

Im Folgenden ist der aktuelle SI-Wert der Gravitationskonstante γ gemäß den Angaben des *Committee on Data for Science and Technology (CODATA)* aus dem Jahr 2022 angegeben:

$$\gamma = 6.67430(15) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad (2)$$

Dank der Entdeckung und der endgültigen Formulierung dieses Gesetzes durch Newton erhielten die von dem deutschen Astronomen Johannes Kepler (1571–1630) formulierten Gesetze der Planetenbewegung eine physikalische Begründung.

Die Kenntnis der Gravitationskonstante γ ermöglicht die Bestimmung der Massen astronomischer Körper, wie beispielsweise der Erde oder des Mondes. Die experimentelle Bestimmung dieser Konstante war aus diesem Grund von zentraler Bedeutung und stellte das eigentliche Ziel des von Cavendish durchgeführten Experiments dar.

2.2 Versuchsaufbau

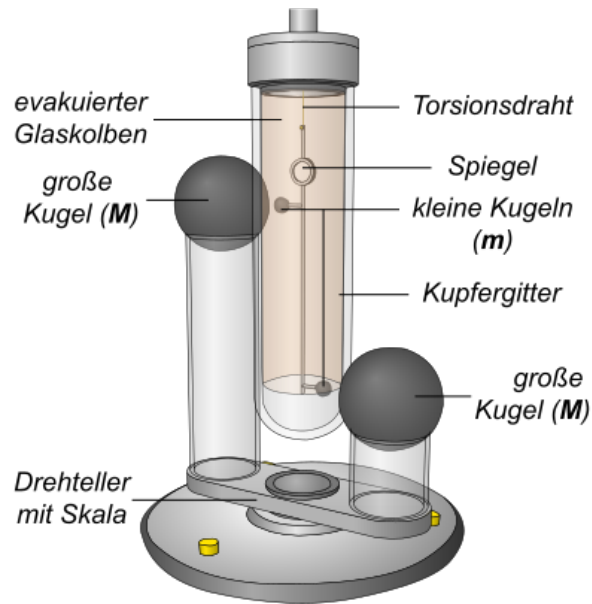


Abbildung 1: Aufbau einer Gravitationswaage

Die Gravitationswaage besteht aus zwei voneinander getrennten Hauptkomponenten:

- evakuierter Glaskolben, der sich hinter einem Kupfergitter befindet und zur Reduktion äußerer Störeinflüsse mechanisch gedämpft ist. Im Inneren des Glaskolbens ist ein Torsionsdraht von oben aufgehängt, welcher eine Rotation des Systems ermöglicht. An geeigneter Stelle ist ein Spiegel angebracht. Abhängig vom Rotationswinkel des Spiegels wird der auf den Spiegel gerichtete Laserstrahl auf den entsprechenden Wert der an der Decke des Labors angebrachten Skala reflektiert. Zudem sind an dem Torsionsdraht zwei kleine Metallkugeln der Masse m aufgehängt
- Drehteller mit Skala, auf dem zwei deutlich größere und schwerere Bleikugeln der Masse M angebracht sind

2.3 Herleitung der Gravitationskonstante

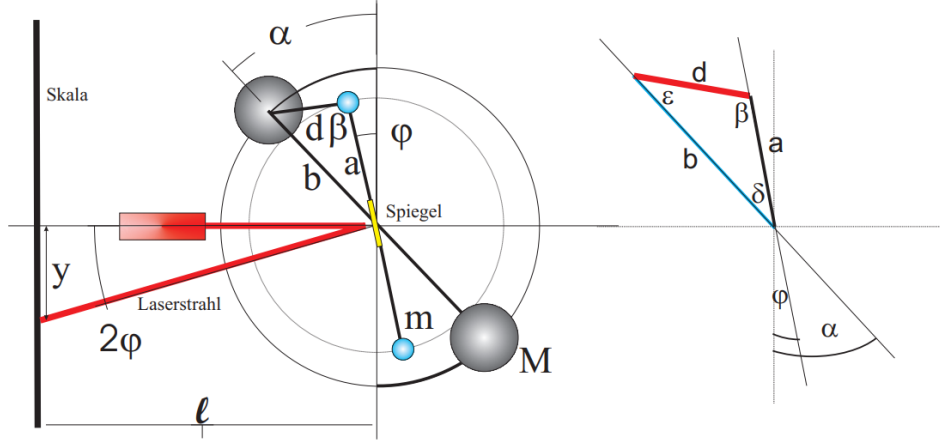


Abbildung 2: Schematischer Aufbau der Gravitationswaage

Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz wirkt zwischen den großen und den kleinen Metallkugeln eine Gravitationskraft, welche die kleinen Kugeln aus ihrer Ruhelage auslenkt, bis sich das Gravitationsmoment M_{grav} und das Torsionsmoment $D\varphi$ gegenseitig kompensieren. Im Gleichgewicht dieser beiden Momente gilt somit:

$$D\varphi = M_{\text{grav}} = 2a\gamma \frac{Mm}{d^2} \sin \beta \quad (3)$$

Hierbei bezeichnet M die Gesamtmasse der großen Kugeln mit Radius R und dem Abstand b von der Drehachse, während m die Gesamtmasse der kleinen Kugeln mit Radius r und dem Abstand a von der Drehachse ist. Der Winkel β beschreibt den Winkel zwischen der Verbindungsachse der kleinen Kugel und der Verbindungslinie zur ihr am nächsten befindlichen großen Kugel. Der Abstand zwischen diesen beiden Kugeln wird mit d bezeichnet.

Die unbekannte Winkelrichtgröße D lässt sich experimentell über die Schwingungsdauer T bestimmen, wobei Θ das Trägheitsmoment der Torsionshantel ist:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D}} \quad (4)$$

$$D = \frac{4\pi^2}{T^2} \Theta \quad (5)$$

Für das in Abbildung 2 dargestellte Dreieck gilt nach dem Sinussatz:

$$\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \delta}{d} = \frac{\sin \epsilon}{a} \quad (6)$$

Daraus folgt:

$$\sin \beta = \frac{b \sin \delta}{d} \quad (7)$$

Für kleine Auslenkungswinkel φ kann der Winkel $\delta = (\alpha - \varphi)$ ohne großen Fehler mit dem Winkel α gleichgesetzt werden. Nach dem Kosinussatz ergibt sich für den Abstand d im gleichen Dreieck:

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \delta \quad (8)$$

Setzt man $\delta = (\alpha - \varphi)$ und berücksichtigt die obigen Zusammenhänge, ergibt sich schließlich folgende Endgleichung zur Bestimmung der Gravitationskonstante γ :

$$\gamma = 4\pi^2 \varphi \frac{\left(\frac{2}{5}r^2 + a^2\right) (a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha)^{3/2}}{T^2 M a b \sin \alpha} \quad (9)$$

3 Durchführung

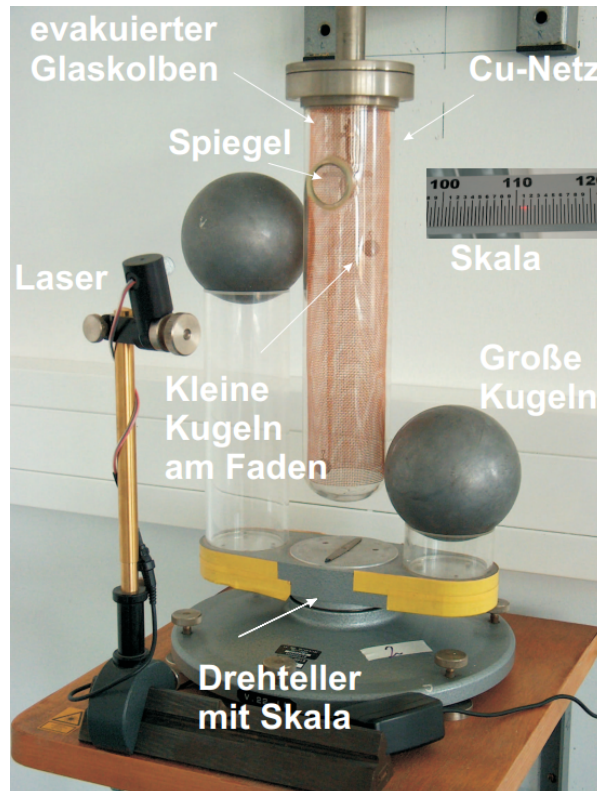


Abbildung 3: Gravitationswaage (Apparatur II)

Für den Beginn der Messung muss sich das gesamte System in der Ruhelage befinden. Dies bedeutet, dass die großen Bleikugeln nicht ausgelenkt sind und somit kein Drehmoment auf den Torsionsdraht wirkt. Diese Ruhelage entspricht zugleich der Nulllage der Gravitationswaage. Der zugehörige Wert wird durch das Ablesen des an der Skala reflektierten Laserstrahls dokumentiert.

Anschließend werden die großen Bleikugeln mithilfe des Drehtellers, welcher mit einer Gradskala versehen ist, bis zu einem Winkel von $\alpha = 45^\circ$ ausgelenkt. Dieser Versuch wird an der Apparatur mit der Nummer II durchgeführt, die mit dem Winkel $\alpha = 45^\circ$ das maximale äußere Drehmoment aller im Labor verfügbaren Apparaturen ermöglicht.

Nach dem Auslenken der großen Bleikugeln beginnt die Gravitationswaage zu schwingen. Der Ausschlag des Laserstrahls auf der Skala wird in Zeitabständen von 15 Sekunden protokolliert. Nach dem Erreichen der fünften Periode wird die Gravitationswaage wieder in ihre Nulllage gebracht. Nun werden die großen Bleikugeln bis zu einem Winkel von $\alpha = -45^\circ$, also in entgegengesetzter Richtung, ausgelenkt und die Messung wird unter denselben Bedingungen erneut durchgeführt.

4 Auswertung

Angaben zur Gravitationswaage II in SI-Einheiten:

Senkrechte Lichtzeigerl	l [m]	2.71
Masse der großen Kugeln	M [kg]	9.993
Masse der kleinen Kugeln	m [kg]	0.02
Radius der kleinen Kugeln	r [m]	0.0075
Abstand Schwerpunkt- Drehachse kl. Kugeln	a [m]	0.024
Abstand Schwerpunkt- Drehachse gr. Kugeln	b [m]	0.102

4.1 Messreihe 1

Erste Messreihe für $\alpha = 45^\circ / 0,7854 \text{ rad}$

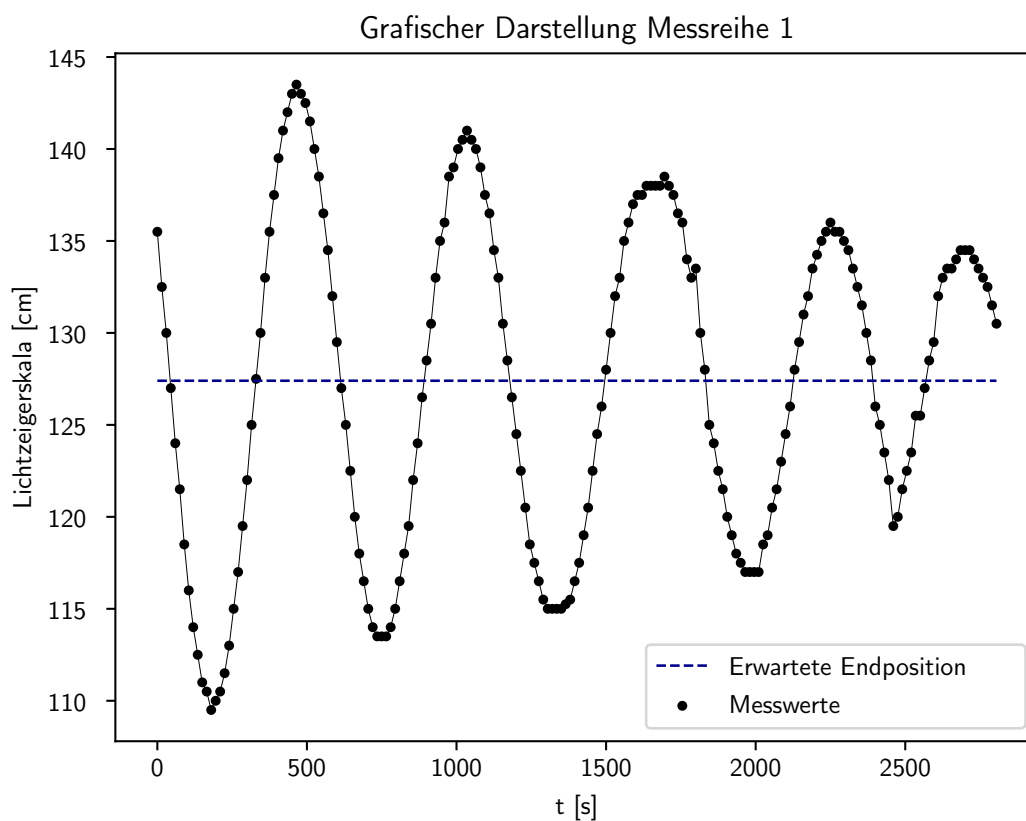


Abbildung 4: Zeitlicher Verlauf des Lichtzeiges (Messreihe 1)

max Auslenkung y [m]	$\bar{y}$ [m]	t [s]
1,095	-	195
1,435	-	480
1,135	1,275	765
1,410	1,279	1050
1,150	1,276	1335
1,380	1,273	1665
1,170	1,270	1995
1,360	1,270	2265
1,200	1,273	2490
1,345	1,276	2715

Für die durchschnittliche Periodendauer über das arithmetische Mittel ergibt sich ein Wert von $\bar{T}=543$ s. Zur Berechnung von $\bar{y}$ nutzen wir die Formel:

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_3 + 2 * y_2}{4} \quad (10)$$

Die durchschnittliche Endstellung über das arithmetische Mittel beträgt $\bar{y}=1,274$ m. Die tatsächliche mittlere Auslenkung ergibt sich hierbei aus der Differenz von der Nullauslenkung und $\bar{y}$ und beträgt somit $1,385\text{m} - 1,274\text{m} = 0,111\text{m}$. Nun lässt sich daraus der Winkel φ aus der Geometrie der Gravitationswaage bestimmen [siehe Abbildung 2]. Es gilt:

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{y}{l}\right) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{0,111\text{m}}{2,71\text{m}}\right) = 0,0205 \text{ rad} \quad (11)$$

Damit sind alle benötigten Werte zur Berechnung von γ bekannt und können eingesetzt werden.

$$\gamma = \frac{4\pi^2 \varphi \left(\frac{2}{5} r^2 + a^2\right) (a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha)^{3/2}}{abMT^2 \sin \alpha} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{4\pi^2 * 0,0205 \left(\frac{2}{5} * (0,0075\text{m})^2 + (0,024\text{m})^2\right) ((0,024\text{m})^2 + (0,102\text{m})^2 - 2 * 0,024\text{m} * 0,102\text{m} * \cos(0,698))^{3/2}}{0,024\text{m} * 0,102\text{m} * 9,993\text{kg} * (543\text{s})^2 \sin(0,698)} \\ &= 6,191 * 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} * \text{s}^2} \end{aligned}$$

4.2 Messreihe 2

Zweite Messreihe für $\alpha = -45^\circ / -0,7854 \text{ rad}$

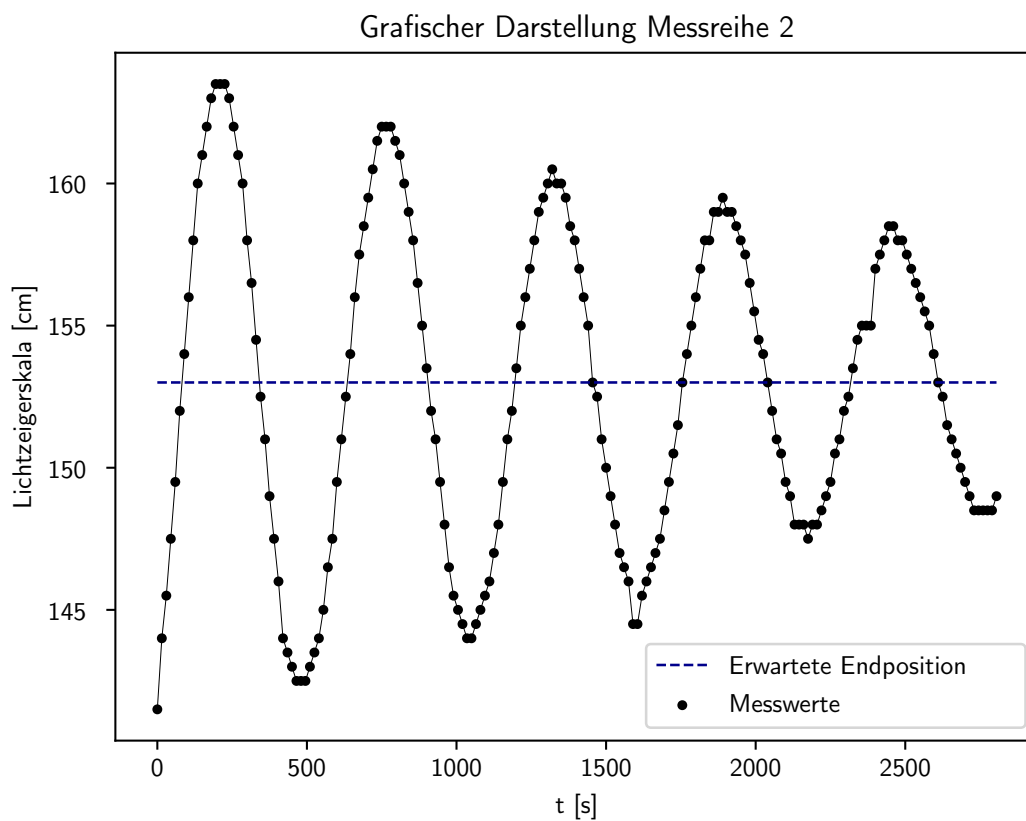


Abbildung 5: Zeitlicher Verlauf des Lichtzeiges (Messreihe 2)

max Auslenkung y [m]	$\bar{y}$ [m]	t [s]
1,635	-	225
1,425	-	495
1,620	1,526	780
1,440	1,526	1065
1,605	1,526	1335
1,445	1,524	1620
1,595	1,532	1905
1,475	1,537	2190
1,585	1,533	2460
1,485	1,533	2760

Die durchschnittliche Periodendauer über das arithmetische Mittel beträgt hierbei $\bar{T}=552$ s und für die Endstellung $\bar{y}=1,530$ m.

Somit gilt für φ :

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{0,145m}{2,71m} \right) = 0,0227 \text{ rad} \quad (13)$$

Einsetzen in die Formel für γ liefert:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{4\pi^2 * 0,0227 \left(\frac{2}{5} * (0,0075m)^2 + (0,024m)^2 \right) ((0,024m)^2 + (0,102m)^2 - 2 * 0,024m * 0,102m * \cos(0,698))^{3/2}}{0,024m * 0,102m * 9,993kg * (552s)^2 \sin(0,698)} \\ &= 6,633 * 10^{-11} \frac{m^3}{kg * s^2} \end{aligned}$$

4.3 Fehlerrechnung

Zur Fehlerberechnung nutzen wir die Gaußsche Fehlerfortpflanzung.

$$\sigma_\gamma = \sqrt{\sigma_\varphi^2 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \right)^2 + \sigma_T^2 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} \right)^2 + \sigma_\alpha^2 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \right)^2} \quad (14)$$

Die jeweiligen zeitlichen Ableitungen ergeben sich zu:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} = \frac{4\pi^2 \left(\frac{2}{5} r^2 + a^2 \right) (a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha)^{3/2}}{abMT^2 \sin \alpha}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial T} = - \frac{8\pi^2 \varphi \left(\frac{2}{5} r^2 + a^2 \right) (a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha)^{3/2}}{abMT^3 \sin \alpha}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} = \frac{4\pi^2 \varphi \left(\frac{2}{5} r^2 + a^2 \right) \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha} (3ab \sin^2 \alpha - (a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha) \cos \alpha)}{abMT^2 \sin^2 \alpha}$$

Bestimmung von σ_φ , σ_α und σ_T :

$$\sigma_\varphi = \sqrt{\sigma_y^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2}$$

Mit der Ableitung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{l} \right)^2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{l}{2(l^2 + y^2)}$$

Für σ_y wird die halbe Skalergröße mit 0,0025 m angenommen. Somit errechnen sich für die Messreihen die Werte $\sigma_{\varphi_1} = 0,000378$ rad und $\sigma_{\varphi_2} = 0,000350$ rad.

Da der Winkel α auf den Grad genau eingestellt werden konnte, ergibt sich für σ_α ein Wert von 0,5° bzw. 0,00873 rad für beide Messreihen.

Ebenfalls für beide Messreihen kann für σ_T der halbe Messabstand, also 7,5 s angenommen werden. Bei einem solch großen Abstand zwischen den Messungen können andere systematische Fehler wie z.B. Reaktionszeit vernachlässigt werden.

Mit diesen Werten und den partiellen Ableitungen ergeben sich: $\sigma_{\gamma_1} = 0,202 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ und $\sigma_{\gamma_2} = 0,208 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$.

5 Diskussion

Bei der Auswertung der ersten Messreihe zeigt sich, dass der ermittelte Wert für γ leicht außerhalb des 1σ -Intervalls des Literaturwertes liegt, wobei die relative Abweichung ca. 7 % beträgt. Im Gegensatz dazu liefert die zweite Messreihe ein deutlich präziseres Ergebnis: Der berechnete Wert liegt innerhalb der einfachen Standardabweichung und weist lediglich eine geringe Abweichung von 0,6 % zum Referenzwert auf.

Ein entscheidender Aspekt bei der Bewertung der Genauigkeit ist die Vollständigkeit der Fehlerrechnung. In der vorliegenden Analyse wurden primär die Unsicherheiten der selbst erhobenen Messgrößen berücksichtigt. Da jedoch auch die herstellerseitig angegebenen Größen – wie der Abstand l , der Kugelradius r oder die Masse M – unvermeidbaren Toleranzen unterliegen, ist davon auszugehen, dass die reale Fehlerumgebung (σ_γ) tatsächlich größer ausfällt. Eine Einbeziehung dieser Größen würde die statistische Signifikanz der Übereinstimmung weiter erhöhen.

Dennoch haben nach unserer Einschätzung systematische und zufällige Einflüsse das Ergebnis stärker dominiert als die Unsicherheiten der Geräteparameter. Die Apparatur reagiert hochsensibel auf mechanische Erschütterungen. Da das Experiment in einem Raum mit mehreren Arbeitsgruppen durchgeführt wurde, führten Bewegungen und Umgebungsgeräusche zu Störungen der Torsionsschwingung, die rechnerisch nur schwer zu erfassen sind.

Zudem war zu beobachten, dass die Kugeln zu Beginn der Messungen keinen absoluten Stillstand aufwiesen. Diese Restschwingungen beeinflussen den Schwingungsverlauf und führen zu einer ‚Vorbelastung‘ der Amplitude. Speziell bei der ersten Messung erforderte eine leichte Nachjustierung des Winkels α einen manuellen Eingriff, was zusätzliche Unruhe in das System brachte und die Abweichungen in dieser Reihe erklärt.

Trotz dieser Störfaktoren belegt insbesondere die zweite Messreihe, dass das Experiment sehr gut geeignet ist, eine präzise Annäherung an die Gravitationskonstante zu liefern. Zur weiteren Steigerung der Genauigkeit sollten künftige Versuche zusätzliche Messreihen bei variierenden Winkeln umfassen. Zudem ließe sich die Datenqualität durch eine konsequente Reduktion äußerer Einflüsse (Vermeidung von Bewegungen im Raum) sowie längere Wartezeiten zwischen den Messungen zur vollständigen Dämpfung der Ruheschwingung signifikant verbessern.