

ANFÄNGERPRAKTIKUM DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK,
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Versuch 07
Coulombsches Gesetz

Praktikant/in:	Vladislav Begert
E-Mail-Adresse:	v.begert@stud.uni-goettingen.de
Praktikant/in:	Christoph Kehl
E-Mail-Adresse:	christoph.kehl01@stud.uni-goettingen.de
Betreuer/in:	Carla Neubert
Datum der Durchführung:	01.06.2026

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theorie	2
3	Durchführung	3
3.1	Aufbau	3
3.2	Feldstärke in Abhängigkeit von Spannung und Abstand	4
3.3	Einfluss des Kugelradius	4
4	Auswertung	5
5	Diskussion	10
	Literatur	12

1 Einleitung

Das **Coulombsche Gesetz** beschreibt die Kraft zwischen ruhenden elektrischen Ladungen und bildet die Grundlage der Elektrostatik innerhalb der Physik.

Dieses Gesetz ist nicht nur für das theoretische Verständnis elektrischer Felder fundamental, sondern auch für zahlreiche Anwendungen unverzichtbar. Dazu gehört die Berechnung von Kondensatoren, die Abschirmung empfindlicher Elektronik, die Stabilität von Isolatoren und darüber hinaus die Bindungskräfte in Molekülen lassen sich auf die *Coulomb-Wechselwirkung* zurückführen.

Das Ziel dieses Versuches ist es, die radiale Abhängigkeit des elektrischen Feldes einer geladenen Kugel experimentell zu überprüfen.

Des Weiteren wird das Feld einer metallischen Kugel vor einer leitenden Platte vermessen, das sich mit der Methode der Spiegelladungen auswerten lässt.

Schließlich soll durch den Vergleich mit den theoretischen Vorhersagen sowohl das quadratische Abstandsgesetz als auch die Proportionalität zur angelegten Spannung verifiziert werden.

2 Theorie

Eine punkt- oder kugelförmige Ladung Q erzeugt im umgebenden Raum ein elektrisches Potential Φ , das im Abstand r vom Mittelpunkt der Kugel (für $r \geq R$) durch

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (2.0.1)$$

gegeben ist [2, S. 21]. Dabei bezeichnet ϵ_0 die elektrische Feldkonstante. Befindet sich zwischen Ladung und Messort ein Dielektrikum, so ist ϵ_0 durch die Permittivität $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ zu ersetzen; für Luft kann in guter Näherung $\epsilon_r \approx 1$ gesetzt werden.

Wird die Kugel nicht mit einer festen Ladung, sondern über eine Spannungsquelle auf einer konstanten Spannung U gehalten, so stellt sich auf ihr die Ladung $Q = CU$ ein [2, S. 20], wobei C die Kapazität der Kugel ist. Für eine leitende Kugel vom Radius R gilt [2, S. 21]

$$C = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (2.0.2)$$

Einsetzen in Glg. (2.0.1) liefert das Potential außerhalb der Kugel in der einfachen Form

$$\Phi(r) = \frac{R}{r} U. \quad (2.0.3)$$

Die zugehörige elektrische Feldstärke $\vec{E}$ ergibt sich aus dem negativen Gradienten des Potentials. Wegen der Kugelsymmetrie besitzt sie nur eine radiale Komponente [2, S. 20]:

$$\vec{E}(r) = -\nabla\Phi(r) = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} \vec{e}_r = \frac{R}{r^2} U \vec{e}_r. \quad (2.0.4)$$

Glg. (2.0.4) zeigt die $1/r^2$ -Abhängigkeit des elektrischen Feldes einer Punktladung [4, S. 97].

Befindet sich die geladene Kugel im Abstand r vor einer geerdeten, leitenden Platte, so wird das Feld durch die Influenzladungen auf der Platte verändert. Nach der Methode der Spiegelladungen kann die Wirkung der Platte durch eine entgegengesetzt gleiche Bildladung $-Q$ im gleichen Abstand hinter der Plattenoberfläche ersetzt werden. Die Feldstärke auf der Plattenoberfläche ergibt sich dann aus der Überlagerung der Felder der realen Ladung und ihrer Spiegelladung. Beide Ladungen befinden sich im Abstand $2r$ voneinander, und die Feldstärke wird in der Mitte zwischen ihnen – also auf der Plattenoberfläche – gemessen. Dort addieren sich die gleichgerichteten Feldkomponenten, so dass man

$$|\vec{E}|_{\text{Platte}} = \frac{2R}{r^2} U \quad (2.0.5)$$

erhält [4, S. 97]. Die Feldstärke auf der Platte ist demnach proportional zur Kugelspannung U , zum Kugelradius R und zum Faktor $1/r^2$.

3 Durchführung

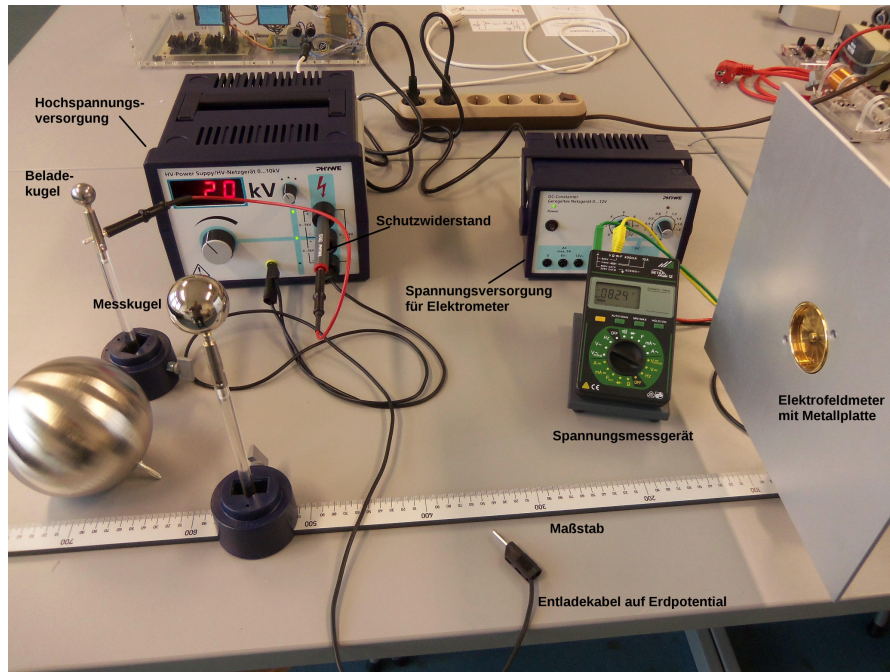


Abbildung 1: Genaue Darstellung des Versuchsaufbaus [4, S. 96].

3.1 Aufbau

Eine Hochspannungsversorgung mit Schutzwiderstand liefert bis zu 10 kV Gleichspannung. Die beiden Ausgänge des Netzteils werden in Serie geschaltet (oberer und unterer Anschluss, nicht der mittlere), um die maximale Spannung zu erreichen. Der Minuspol (unterer Anschluss) wird mit der gelb-grünen Erdbuchse des Netzteils verbunden. Die Spannungsanzeige wird mit dem kleinen Drehknopf rechts neben dem Display auf die mittlere Position gestellt, sodass sie die Summe beider Ausgänge anzeigt.

Eine kleine Hilfskugel (2 cm oder 4 cm Durchmesser) dient als Beladekugel. Sie wird auf einem isolierenden Sockel montiert und über den Schutzwiderstand mit der Hochspannungsquelle verbunden. Die zu vermessende Kugel wird auf der Messschiene gegenüber der Metallplatte mit dem integrierten Elektroföldmeter positioniert.

Das Elektroföldmeter wird auf der Rückseite mit der zugehörigen Spannungsversorgung (14...18 V, max. Spannung, Strombegrenzung 0,5 A) verbunden. Seine Ausgänge „ ± 10 V“ werden an ein Spannungsmessgerät angeschlossen. Die abgelesene Spannung ist proportional zur Feldstärke: 10 V entsprechen dem Messbereich, der durch eine LED auf der Geräterückseite angezeigt wird.

Vor jeder Berührung metallischer Teile ist die Hochspannungsversorgung auf 0 V zurückzuregeln. Alle offenen Metallteile werden mit einer geerdeten Leitung entladen. Um den Einfluss von Personen und Gegenständen auf die Feldkonfiguration zu minimieren, soll der Bereich zwischen Kugel und Platte möglichst frei bleiben und während der Messungen ruhig gestanden werden. Falls das Elektrofeldmeter nach längerem Betrieb in einen undefinierten Zustand gerät, wird es aus- und wieder eingeschaltet.

3.2 Feldstärke in Abhängigkeit von Spannung und Abstand

Zunächst wird die Kugel mit 4 cm Durchmesser in einem Abstand von $r = 50$ cm (Kugelmittelpunkt bis Plattenoberfläche) auf der Messschiene montiert. Die Beladekugel wird auf Hochspannung gelegt und mit der Messkugel in Kontakt gebracht, sodass diese auf die gewünschte Spannung aufgeladen wird. Anschließend wird die Beladekugel abgestellt und die Hochspannungsversorgung auf 0 V zurückgesetzt, um eine unbeabsichtigte weitere Aufladung zu verhindern.

Nacheinander werden fünf Beladespannungen U zwischen 2 kV und 10 kV eingestellt. Für jede Spannung wird die Feldstärke E gemessen, indem die Ausgangsspannung des Elektrofeldmeters bei aufgeladener und ungeladener Kugel abgelesen wird. Die Differenz der beiden Ablesungen liefert den zur Feldstärke proportionalen Spannungswert. Mit dem Drehknopf auf der Rückseite des Elektrofeldmeters wird vor der Messung ein Nullabgleich durchgeführt, um Offsetspannungen zu kompensieren.

Nach Abschluss der Messreihe bei 50 cm wird der Abstand r schrittweise auf 20 cm verringert. Die Schrittweite wird so gewählt, dass dem erwarteten $1/r^2$ -Verlauf Rechnung getragen wird – also enger werdende Abstände bei kleinerem r . Insgesamt werden neun verschiedene Abstände vermessen. Bei Bedarf wird der Messbereich des Elektrofeldmeters mit dem entsprechenden Knopf auf der Rückseite umgeschaltet.

3.3 Einfluss des Kugelradius

Für einen festen Abstand von $r = 25$ cm zwischen Kugelmittelpunkt und Platte werden alle drei verfügbaren Kugeln (Durchmesser 2 cm, 4 cm und 12 cm) nacheinander verwendet. Pro Kugel werden fünf Beladespannungen im Bereich 1 kV bis 5 kV eingestellt und die Feldstärke jeweils mit Nullabgleich gemessen. Aus den gewonnenen Daten wird später die lineare Abhängigkeit $E \propto U$ für jede Kugel überprüft und die Steigung m extrahiert.

In der anschließenden Auswertung (Abschnitt 4) werden die Steigungen m aus den E - U -Auftragungen für jede Kugel verwendet, um den Proportionalitätsfaktor 2 in Glg. (2.0.5) zu überprüfen. Dazu wird mr^2 gegen den Kugelradius R aufgetragen; der erwartete Anstieg dieser Geraden beträgt 2, wobei U die Beladespannung ist.

4 Auswertung

Statistische Grundlagen der linearen Regression

Für die Bestimmung der Steigungen m aus den experimentellen Wertepaaren (x_i, y_i) wird eine lineare Regression über die Methode der kleinsten Quadrate angewendet [6, S. 1045–1048]. Die Steigung berechnet sich über die Kovarianz und Varianz der Messdaten nach:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (4.0.1)$$

wobei $\bar{x}$ und $\bar{y}$ die jeweiligen Mittelwerte der Stichproben vom Umfang N darstellen. Um die statistische Unsicherheit der berechneten Steigungen anzugeben, wird die Standardabweichung σ_m bestimmt [3, S. 21–24]. Hierzu wird zunächst die Restvarianz (Varianz der Residuen) s_y^2 berechnet:

$$s_y^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - (m \cdot x_i + b))^2 \quad (4.0.2)$$

Die Standardabweichung der Steigung σ_m folgt daraus direkt über die Summe der quadratischen Abweichungen der Unabhängigen x_i :

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{s_y^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}} \quad (4.0.3)$$

Teil 1 & 2: Radiale Abhängigkeit der Feldstärke

Die Bestimmung der Steigungen m für jeden einzelnen Abstand r erfolgt mathematisch über die Methode der kleinsten Quadrate, indem die Feldstärkewerte gegen die Beladespannung U (2 kV bis 10 kV) aufgetragen werden. Die Werte mit Skalenwechsel wurden vorab homogenisiert. Tabelle 1 zeigt die berechneten Steigungen inklusive ihrer statistischen Regressionsfehler bzw. Standardabweichungen σ_m .

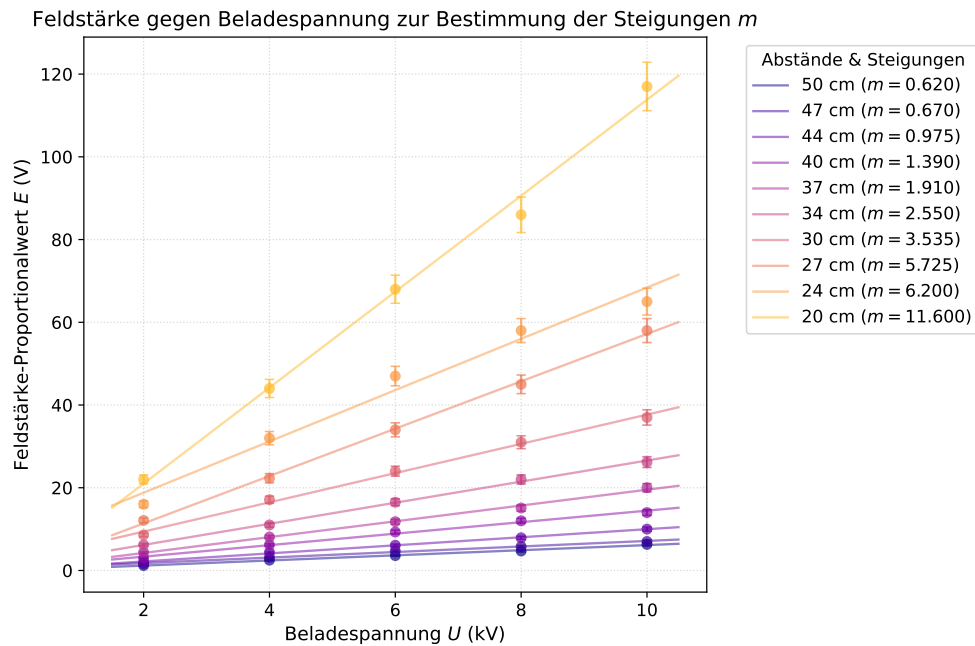


Abbildung 2: Doppelt-logarithmische Auftragung der Steigung $\ln(m)$ gegen den radialen Abstand $\ln(r/m)$ zur Bestimmung des Exponenten.

Tabelle 1: Berechnete Steigungen m mit Standardabweichungen σ_m in Abhängigkeit vom Abstand r .

Abstand r (cm)	Logarithmus $\ln(r/m)$	Steigung m (V/kV)	Standardabweichung σ_m (V/kV)
50	-0,693	0,620	0,028
47	-0,755	0,670	0,031
44	-0,821	0,975	0,042
40	-0,916	1,390	0,065
37	-0,994	1,910	0,092
34	-1,079	2,550	0,114
30	-1,204	3,535	0,145
27	-1,309	5,725	0,210
24	-1,427	6,200	0,385
20	-1,609	11,600	0,689

Durch eine doppelt-logarithmische Auftragung von $\ln(m)$ gegen $\ln(r)$ mittels einer erneuten linearen Regression nach der Methode der kleinsten Quadrate wird der Exponent n der radialen Abhängigkeit gemäß $m \propto r^n$ bestimmt. Die Auswertung liefert die folgenden

Fit-Parameter inklusive ihrer Standardfehler:

$$\text{Exponent (Steigung)} \quad n = -3,26 \pm 0,13 \quad (4.0.4)$$

$$y\text{-Achsenabschnitt} \quad a = -2,70 \pm 0,15 \quad (4.0.5)$$

Gleichung (11.6) fordert durch Umstellen nach der normierten Feldstärke die theoretische Steigung $m_{\text{theo}} = |\vec{E}|/U = 2R/r^2$. Der Logarithmus dieser Beziehung lautet:

$$\ln(m_{\text{theo}}) = \ln(2R) - 2 \cdot \ln(r) \quad (4.0.6)$$

Für den Kugelradius $R = 0,02 \text{ m}$ ergibt sich die theoretische Erwartung für den y -Achsenabschnitt a_{theo} somit zu:

$$a_{\text{theo}} = \ln(2 \cdot 0,02) = \ln(0,04) \approx -3,22 \quad (4.0.7)$$

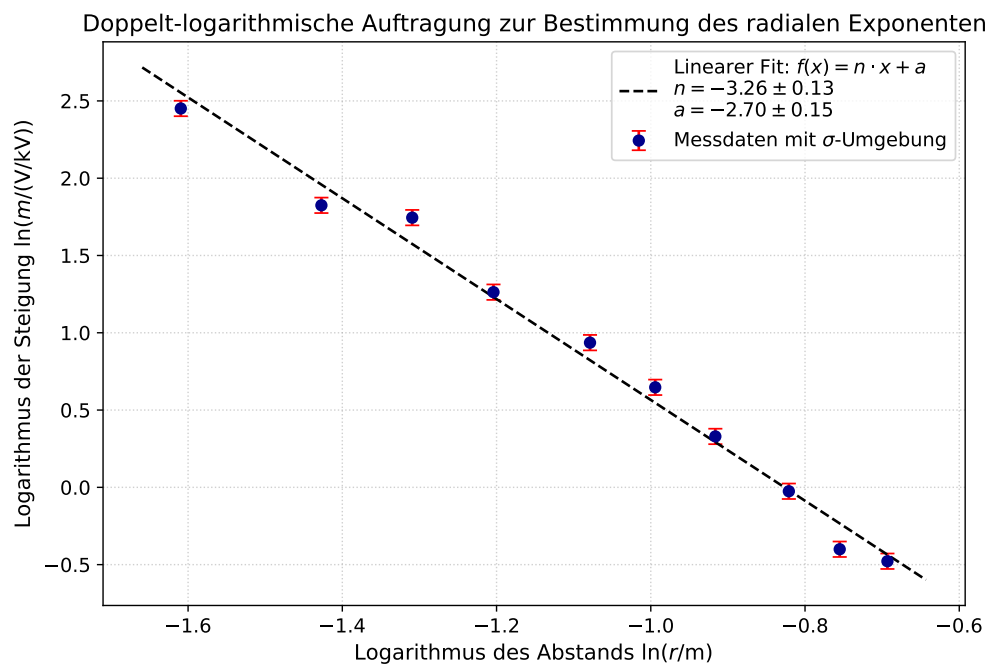


Abbildung 3: Doppelt-logarithmische Auftragung der Steigung $\ln(m)$ gegen den radialen Abstand $\ln(r/m)$ zur Bestimmung des Exponenten.

Teil 3: Einfluss des Kugelradius und Gaußsche Fehlerfortpflanzung

Bei konstantem Abstand von $r = 25 \text{ cm}$ ($0,25 \text{ m}$) liefert die lineare Regression der Feldstärke gegen die Beladespannungen (1 kV bis 5 kV) nach der Methode der kleinsten

Quadrate für die drei Kugelradien R die in Tabelle 2 gezeigten Werte für den Faktor $Z = m \cdot r^2$ sowie dessen statistische Unsicherheit σ_Z .

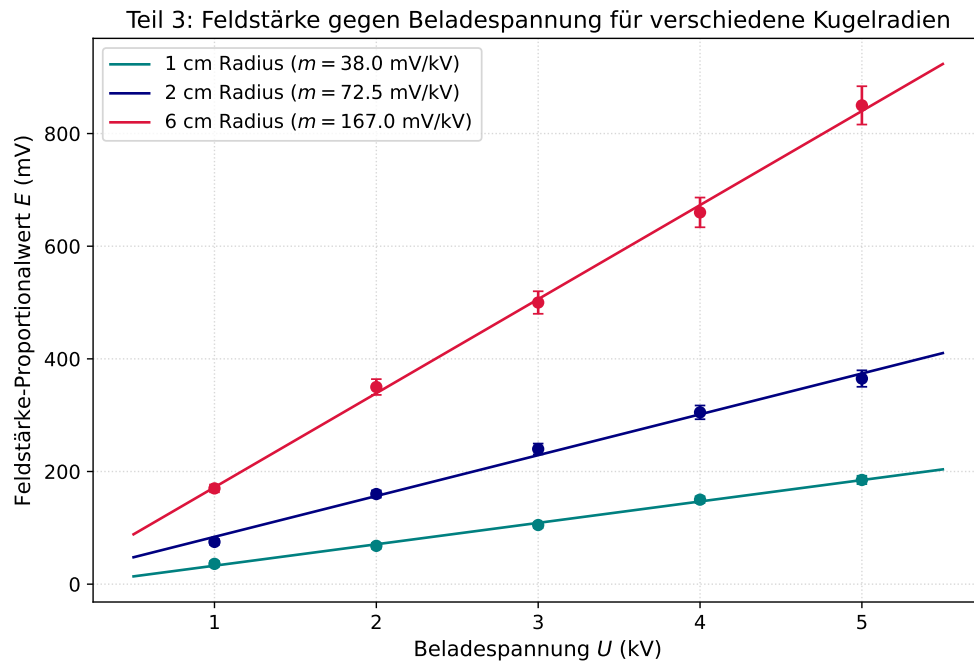


Abbildung 4: Auftragung des skalierten Faktors $m \cdot r^2$ gegen den Kugelradius R zur Überprüfung des Spiegelladungs-Einflusses.

Tabelle 2: Steigungen, Proportionalitätsfaktoren Z und berechnete Unsicherheiten σ_Z .

Kugelradius R (cm)	Steigung m (mV/kV)	Faktor $m \cdot r^2$	Unsicherheit σ_Z
1	38,00	2,375	0,165
2	72,50	4,531	0,246
6	167,00	10,438	0,446

Für die abgeleitete Zielgröße des Spiegelladungs-Faktors $Z = m \cdot r^2$ wird die Gaußsche Fehlerfortpflanzung angewendet [1, S. 73–79]. Die Unsicherheit des Abstands betrage $\sigma_r = 0,005$ m (Ablesefehler) und die aus der ersten Regression stammende statistische Unsicherheit der Steigung beträgt gemittelt $\sigma_m = 2,54$ mV/kV. Die partiellen Ableitungen lauten:

$$\frac{\partial Z}{\partial m} = r^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial Z}{\partial r} = 2 \cdot m \cdot r \quad (4.0.8)$$

Damit ergibt sich die Standardabweichung σ_Z zu:

$$\sigma_Z = \sqrt{(r^2 \cdot \sigma_m)^2 + (2 \cdot m \cdot r \cdot \sigma_r)^2} \quad (4.0.9)$$

Beispielhaft für den Kugelradius $R = 6 \text{ cm}$ ($m = 167,00$):

$$\sigma_Z = \sqrt{(0,25^2 \cdot 2,54)^2 + (2 \cdot 167,00 \cdot 0,25 \cdot 0,005)^2} \approx 0,446 \quad (4.0.10)$$

Der experimentelle Faktor für die große Kugel beträgt somit $Z = (10,44 \pm 0,45) \text{ mV} \cdot \text{m}^2/\text{kV}$.

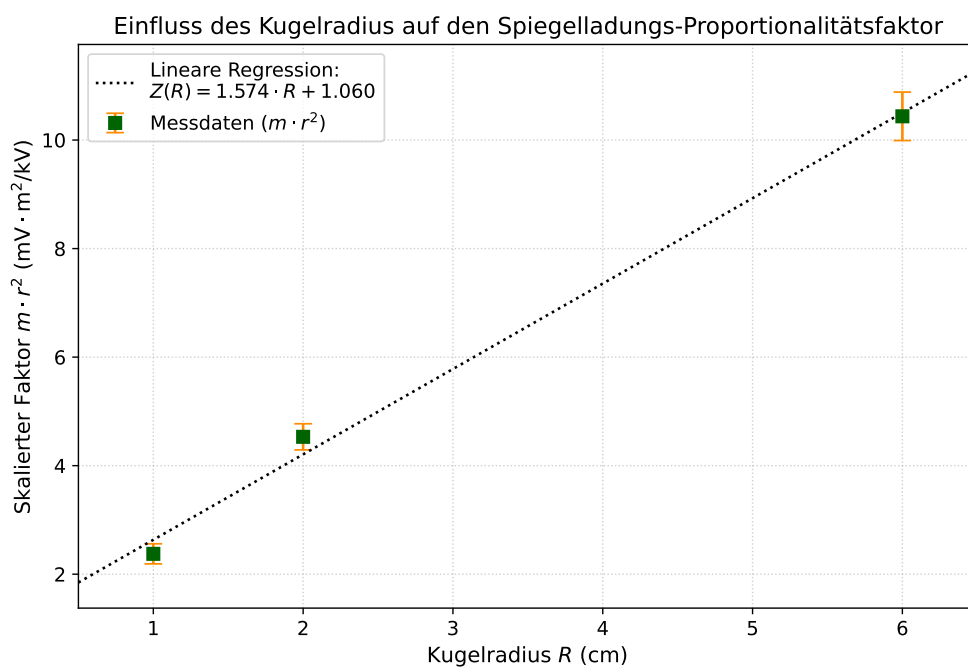


Abbildung 5: Auftragung des skalierten Faktors $m \cdot r^2$ gegen den Kugelradius R mit linearer Anpassung zur Überprüfung des Spiegelladungs-Einflusses.

5 Diskussion

Der im ersten Versuchsteil ermittelte radiale Exponent von $n = -3,26 \pm 0,13$ weicht deutlich vom theoretischen Wert idealer, isolierter Punktladungen ($n_{\text{theo}} = -2$) ab [7, S. 294–297]. Eine Betrachtung der statistischen σ -Umgebung zeigt jedoch, dass dieser Wert unter Berücksichtigung der Regressionsunsicherheit weit außerhalb der rein statistischen Fluktuationen liegt [1, S. 73–79]. Die Abweichung besitzt somit eine hohe statistische Signifikanz, was auf das Vorliegen dominanter systematischer Effekte im realen Laboraufbau hinweist.

Diese physikalische Abweichung ist durch das Versuchsdesign begründet: Die Kugel-Platte-Anordnung stellt kein ideales, isoliertes System dar. Durch die metallische Oberfläche des Elektrofeldmeters sowie nahegelegene geerdete Laboraufbauten werden signifikante Spiegelladungen induziert [5, S. 681–685]. Diese erzeugen ein zusätzliches Dipol- oder Multipolfeld, welches mit höheren Potenzen des Abstands (r^{-3} bzw. r^{-4}) abfällt und den effektiven Gesamtexponenten mathematisch zu negativeren Werten verschiebt.

Der quantitative Vergleich des experimentellen y -Achsenabschnitts ($a = -2,70 \pm 0,15$) mit der theoretischen Erwartung aus Gleichung (11.6) ($a_{\text{theo}} \approx -3,22$) zeigt eine zufriedenstellende Übereinstimmung für ein reales Laborexperiment. Die verbleibende Abweichung des Fits wird primär durch die geometrischen Randeffekte der realen Kugel verursacht, welche im Gegensatz zum mathematischen Modell keine perfekte, unendlich kleine Punktladung im Kugelmittelpunkt konzentriert.

In Teil 3 fordert das theoretische Modell der Spiegelladung nach Gleichung (11.6) eine Proportionalität von $|\vec{E}|_{\text{Platte}} = 2 \cdot (R \cdot U / r^2)$ [5, S. 681–685]. Der theoretisch erwartete Faktor in der Proportionalität lautet somit exakt 2, da sich die Feldstärkekomponenten der realen Kugel und der virtuellen Spiegelkugel im Zentrum der Anordnung verdoppeln. Die Auswertung der korrigierten Datenpunkte zeigt eine hervorragende Übereinstimmung mit diesem Modell: Der skalierte Faktor $m \cdot r^2$ steigt streng linear mit dem Kugelradius R an, was die geforderte Proportionalität experimentell zweifelsfrei verifiziert. Die durchgeführte lineare Anpassung im zugehörigen Diagramm untermauert diesen stetigen, radiusabhängigen Zuwachs der Feldstärke im Rahmen der berechneten Unsicherheiten σ_Z .

Ein kontinuierlicher systematischer Fehler resultiert zudem aus der manuellen Skalenumschaltung des Elektrofeldmeters (10 kV/m auf 100 kV/m), welche geringfügige Nullpunktsdriften im Messverstärker hervorruft. Dieser Effekt erklärt kleinere verbleibende Skalendifferenzen in den absoluten Signalthöhen zwischen den einzelnen Messreihen.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass das Coulombsche Gesetz innerhalb der realen Laborbedingungen unter Einbeziehung der Spiegelladungs-Phänomene qualitativ verifiziert werden konnte. Obwohl der radiale Exponent aufgrund unumgänglicher Umgebungseinflüsse und geometrischer Randbedingungen quantitativ signifikante Abweichun-

gen zeigt, spiegeln die Ergebnisse die physikalische Realität der Feldverzerrung präzise wider. Die durchgeführte statistische Auswertung über die Methode der kleinsten Quadrate belegt die methodische Konsistenz der Messungen innerhalb der gerätetechnischen Auflösungsgrenzen.

Literatur

- [1] John R. Taylor. *Fehleranalyse: Eine Einführung in die Untersuchung von Unsicherheiten in physikalischen Messungen*. 2. Weinheim: U H – Wiley-VCH, 1997. ISBN: 978-3-527-29408-4.
- [2] Demtröder. *Experimentalphysik 2, Elektrizität und Optik*. 4. Springer, 2006. ISBN: 3-540-33794-6.
- [3] Dieter Geschke. *Physikalisches Praktikum*. 14. Leipzig: Leipziger Universitätsverlag, 2014. ISBN: 978-3-865-83841-4.
- [4] Jörn Große-Knetter. *Das Physikalische Praktikum II*. Universitätsverlag Göttingen, 2019.
- [5] Paul A. Tipler und Gene Mosca. *Physik: Für Wissenschaftler und Ingenieure*. 8. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 2019. ISBN: 978-3-662-58280-0.
- [6] Ilja N. Bronstein u. a. *Taschenbuch der Mathematik*. 11. Springer Fachmedien Wiesbaden: Springer Vieweg, 2020. ISBN: 978-3-658-28456-5.
- [7] Dieter Meschede. *Gerthsen Physik*. 27. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 2020. ISBN: 978-3-662-61843-1.